Latvijas Universitātes aģentūra
Latvijas Universitātes Matemātikas un informātikas institūts

N.Vasiļjevs, A.Lepins, L.Lepins

Ceturtās kārtas robežproblēmu ekstremālie atrisinājumi

Zinātniskā konference "Matemātika un informātika pēc 50..."
2009. gada 9. novembris

Aplūkosim robežproblēmu

$$x^{(4)} = f(t), \quad |f| \le g, \quad l_i x = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \qquad (1)$$

kur $g \in L([0, 1], [0, \infty))$ ir fiksēts, $f \in L([0, 1], R)$,
$l_i x = x^{(m_i)}(0)$ vai $l_i x = x^{(m_i)}(1)$, $0 \le m_i \le 3$, $i = 1, \ldots, 4$.

Pieņemsim ka $a(m) = 1$ visiem $m \in \{0, 1, 2, 3\}$, ja atradīsies $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tāds, ka $l_i x = x^{(m_i)}(0)$, un $a(m) = 0$ pretējā gadījumā, $b(m) = 1$ visiem $m \in \{0, 1, 2, 3\}$, ja atradīsies $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tāds, ka $l_i x = x^{(m_i)}(1)$, un $b(m) = 0$ pretējā gadījumā. Pieņemsim, ka izpildās nosacījumi

$$\sum_{k=0}^{m}(a(k)+b(k)) \geq m+1, \quad m \in \{0,1,2\}, \quad \sum_{k=0}^{3}(a(k)+b(k)) = 4, \qquad (2)$$

kas garantē robežproblēmas (1) atrisinājuma x_f eksistenci un unitāti.

Robežproblemu (1) vizuālais attēlojums.

Šeit zīmējumā ir divu robezproblēmu piemēri

$$
\begin{array}{ccc}
3 & \circ & \circ \\
2 & \circ & \times \\
1 & \times & \circ \\
0 & \times & \times \\
 & t=0 & t=1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
3 & \circ & \circ \\
2 & \circ & \circ \\
1 & \times & \times \\
0 & \times & \times \\
 & t=0 & t=1
\end{array}
$$

Kreisa kolonna atbilst intervāla kreisajai malai, laba – labajai malai, bet rindas atbilst pašai funkcijai un tās atvasinājumiem. Ar krustiņu ir atzīmēti pozīcijas kur robežnosacījums ir, bet ar nullēm – kur nav. Vispār ir 70 dažādas robežproblēmas, bet tikai 42 no tiem atbilst nosacījumiem (2).

Apzīmēsim robežproblēmas (1) atrisinājumu kopu ar X , un ar $y_m \in X$ visiem $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ apzīmēsim ekstremālo atrisinājumu, kurām

$$\left\| y_m^{(m)} \right\|_C = \max\{\left\| x^{(m)} \right\|_C : x \in X\} = M_m .$$

Ir spēkā apgalvojums.

Teorēma. Ar precizitāti līdz zīmei eksistē viens vienīgs ekstremāls atrisinājums x_g.

Vispār ir 70 robežproblēmas formā (1), no tiem 42 apmierina nosacījumiem (2). Par tādu robežproblēmu piemēriem kalpo

$$
\begin{aligned}
&x^{(4)} = f(t),\ |f| \le g,\ x(0)=0,\ x(1)=0,\ x'(0)=0,\ x'(1)=0,\\
&x^{(4)} = f(t),\ |f| \le g,\ x(0)=0,\ x(1)=0,\ x''(0)=0,\ x''(1)=0,\\
&x^{(4)} = f(t),\ |f| \le g,\ x(0)=0,\ x(1)=0,\ x'(0)=0,\ x''(0)=0,\\
&x^{(4)} = f(t),\ |f| \le g,\ x(0)=0,\ x(1)=0,\ x'(0)=0,\ x''(1)=0,
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Izrādījās, ka Teorēmas pieradīšanai pietiek pieradīt to robežproblēmam (3), un tas bija izdarīts.

Ekstremālo atrisinājumu zināšana ļauj, lietojot aprioro novērtējumu metodi, atrast precīzos novērtējumus operatoru robežproblēmas

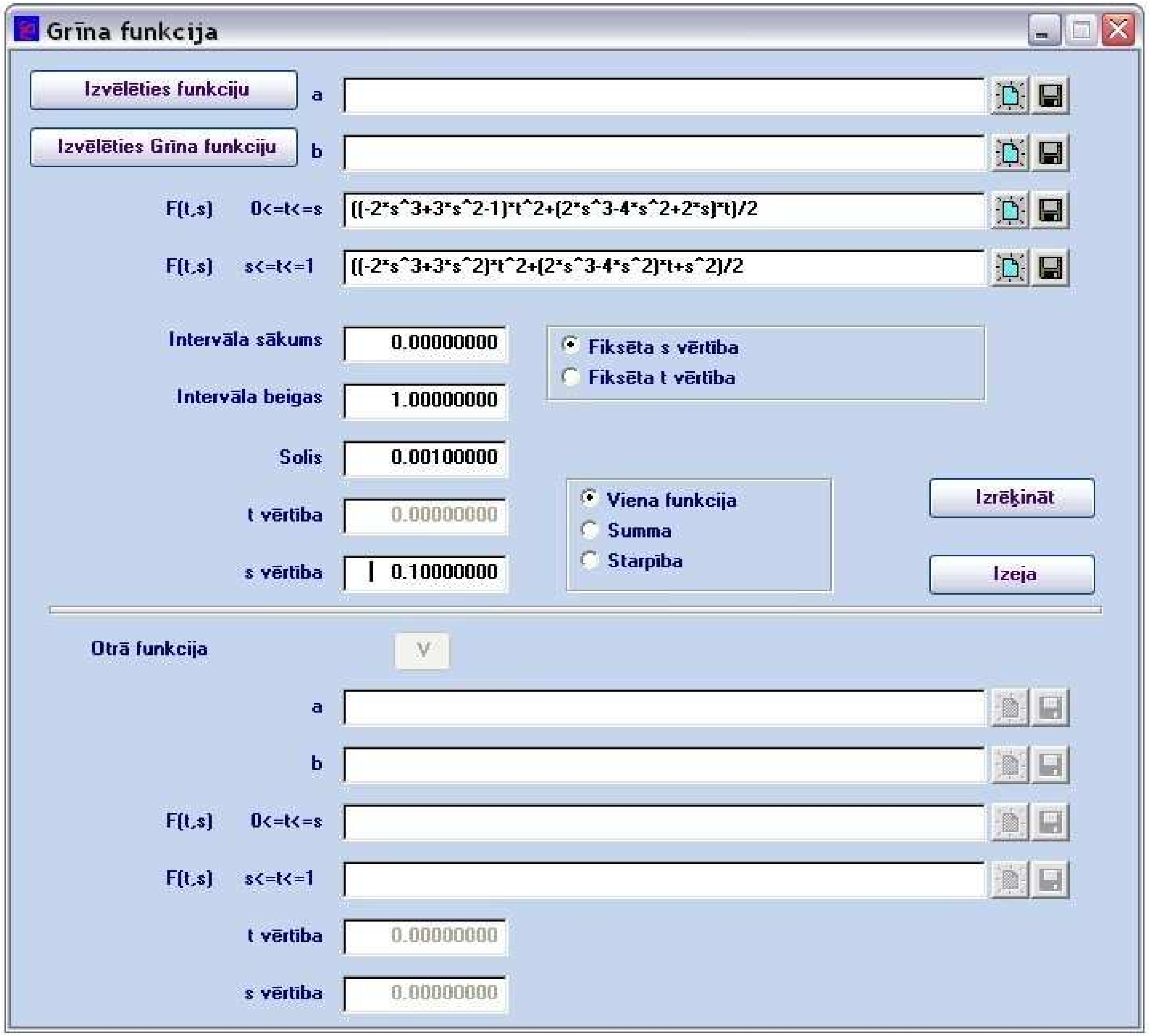
$$x^{(4)} = Fx, \quad l_i x = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \qquad (4)$$

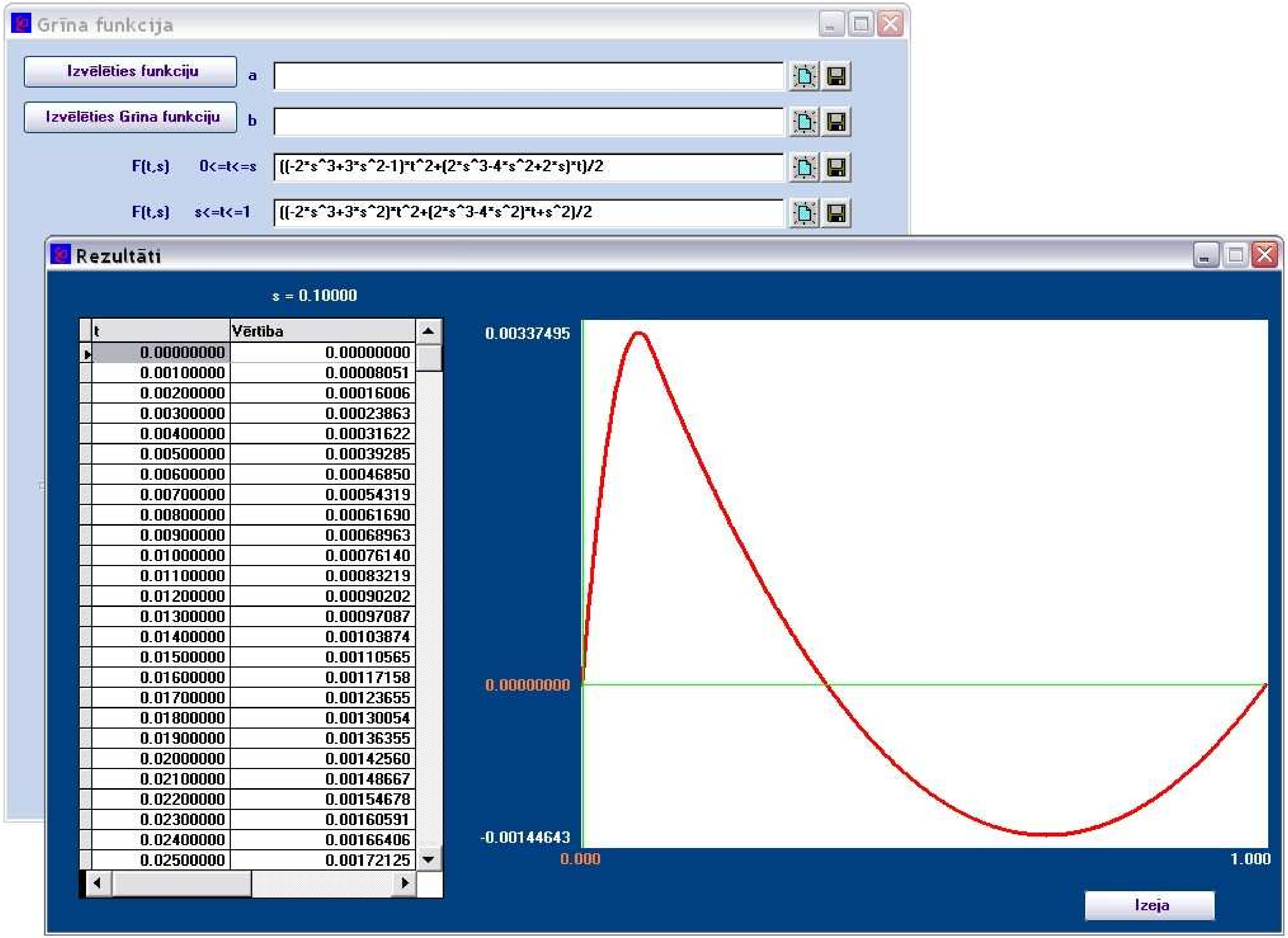
atrisinājumiem.

Teorēma. Robežproblemai (4) ir atrisinājums ja visiem $x \in AC^3([0, 1], R)$ izpildās implikācija

$$\left\| x^{(m)} \right\|_C \leq M_m, \quad m = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \left| Fx \right| \leq g,$$

Pieradīšanas gaitā bija svarīgi izpētīt Grīna funkcijas robežproblēmai (1) uzvedību. Šīm mērķim būtiski līdzēja speciāli izstrādātā programmatūra, kas ļauj pētīt Grīna funkcijās un tās atvasinājumu grafikus un vērtību tabulas fiksētiem t vai s vērtībām. Programmatūra arī ļauj pētīt summu vai starpību starp divām Grīna funkcijām un atrast saknes intervālā (0,1) vai pārliecināties, ka sakņu nav.


Grīna funkcija
Izvēlēties funkciju
a
Izvēlēties Grīna funkciju
b
F(t,s) 0<=t<=s
((-2*s^3+3*s^2-1)*t^2+(2*s^3-4*s^2+2*s)*t)/2
F(t,s) s<=t<=1
((-2*s^3+3*s^2)*t^2+(2*s^3-4*s^2)*t+s^2)/2
Intervāla sākums
0.00000000
Intervāla beigas
1.00000000
Solis
0.00100000
t vērtība
0.00000000
s vērtība
0.10000000
Fiksēta s vērtība
Fiksēta t vērtība
Viena funkcija
Summa
Starpība
Izrēķināt
Izeja
Otrā funkcija
V
a
b
F(t,s) 0<=t<=s
F(t,s) s<=t<=1
t vērtība
0.00000000
s vērtība
0.00000000



t	Vērtība
0.00000000	0.00000000
0.00100000	0.00008051
0.00200000	0.00016006
0.00300000	0.00023863
0.00400000	0.00031622
0.00500000	0.00039285
0.00600000	0.00046850
0.00700000	0.00054319
0.00800000	0.00061690
0.00900000	0.00068963
0.01000000	0.00076140
0.01100000	0.00083219
0.01200000	0.00090202
0.01300000	0.00097087
0.01400000	0.00103874
0.01500000	0.00110565
0.01600000	0.00117158
0.01700000	0.00123655
0.01800000	0.00130054
0.01900000	0.00136355
0.02000000	0.00142560
0.02100000	0.00148667
0.02200000	0.00154678
0.02300000	0.00160591
0.02400000	0.00166406
0.02500000	0.00172125