Экстремальные решения краевых задач для уравнения пятого порядка

Н.И. Васильев

Аннотация. Для простейшего дифференциального уравнения пятого порядка рассматриваются экстремальные решения двухточечных краевых задач.
Библиогр. 2назв.

УДК 517.927

Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$x^{(5)} = f(t), \quad |f| \le 1, \quad l_i x = 0, \quad i = 1, ..., 5, \tag{1}$$

где $f \in L(I, [-1, 1])$, $l_i x = x^{(m_i)}(0)$ или $l_i x = x^{(m_i)}(1)$, $0 \le m_i \le 4$. Пусть $a(m) = 1$ для $m \in \{0, ..., 4\}$, если найдется $i \in \{1, ..., 5\}$ такое, что $l_i x = x^{(m)}(0)$, и $a(m) = 0$ в противном случае. Аналогично, $b(m) = 1$ для $m \in \{0, ..., 4\}$, если найдется $i \in \{1, ..., 5\}$ такое, что $l_i x = x^{(m)}(1)$, и $b(m) = 0$ в противном случае.

Задачу (1) будем изучать при дополнительных ограничениях на краевые условия

$$\sum_{k=0}^{m}(a(k) + b(k)) \ge m + 1, \quad m \in \{0, ..., 3\}, \quad \sum_{k=0}^{4}(a(k) + b(k)) = 5. \tag{2}$$

Как следует из работы [1], при условиях (2) для любого $f \in L(I, R)$ задача (1) имеет решение, которое единственно. Решение краевой задачи (1) будем обозначать через x_f. Далее, через X обозначим множество решений краевой задачи (1).

Решение $y_m \in X$ для $m \in \{0, ..., 4\}$ будем считать экстремальным решением, если для него выполняется условие

$$\|y_m^{(m)}\|_C = \max\{\|x^{(m)}\|_C : x \in X\} = M_m.$$

Множество экстремальных решений для $m \in \{0, ..., 4\}$ обозначим Y_m.

В работе [2] доказано свойство экстремальных решений, которое будет использовано нами в дальнейшем и которое применительно к нашей задаче может быть сформулировано следующим образом:

Пусть $\tau \in (0,1)$ и $G(t,\tau)$ - решение краевой задачи

$$x^{(5)}(t) = \delta(t-\tau), \quad l_i x = 0, \quad i = 1, ..., 5,$$

где δ - дельта функция. Если экстремальная функция y_m, $m \in \{0, ..., 4\}$ принимает экстремальное значение в точке $\eta \in (0,1)$, то

$$y_m^{(5)}(s) = \mathrm{sign}\,(\mathrm{G^{(m)}}(\eta, \mathrm{s}))\mathrm{sign}\,(\mathrm{y_m^{(m)}}(\eta)), \quad \mathrm{s} \in (0,1). \tag{3}$$

С точностью до замены независимой переменной t на $1-t$ мыслимы всего $1 + C_5^4 * C_5^1 + C_5^3 * C_5^2 = 126$ различных краевых задач вида (1), то есть это задача Коши с условиями на левом конце интервала, всевозможные краевые задачи с четырьмя граничными условиями на левом конце интервала и одним граничным условием на правом, а также всевозможные краевые задачи с тремя граничными условиями на левом конце интервала и двумя граничными условиями на првом. Нас будет интересовать вопрос, совпадают ли экстремальные решения задачи (1) с соответствующими решениями задачи

$$x^{(5)} = 1, \quad l_i x = 0, \quad i = 1, ..., 5. \tag{4}$$

С учетом ограничений (2) на краевые условия задачи (1) и принимая во внимание результаты, полученные в работе [2], для положительного ответа на интересующий нас вопрос достаточно изучить свойства экстремальных решений следующих шести задач:

$$x^{(5)} = f(t), |f| \leq 1, x(0) = 0, x(1) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 0, x'''(1) = 0, \tag{5}$$

$$x^{(5)} = f(t), |f| \leq 1, x(0) = 0, x(1) = 0, x'(0) = 0, x''(1) = 0, x'''(0) = 0, \tag{6}$$

$$x^{(5)} = f(t), |f| \leq 1, x(0) = 0, x(1) = 0, x'(0) = 0, x''(1) = 0, x'''(1) = 0, \tag{7}$$

$$x^{(5)} = f(t), |f| \leq 1, x(0) = 0, x(1) = 0, x'(0) = 0, x'(1) = 0, x'''(0) = 0, \tag{8}$$

$$x^{(5)} = f(t), |f| \leq 1, x(0) = 0, x(1) = 0, x'(0) = 0, x'(1) = 0, x''(0) = 0, \tag{9}$$

$$x^{(5)} = f(t), |f| \leq 1, x(0) = 0, x(1) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 0, x''(1) = 0. \tag{10}$$

В этой работе мы покажем, что экстремальные решения четвертой, пятой и шестой из приведенных выше задач (8)-(10) совпадают, соответственно, с решениями задач (11)-(13)

$$x^{(5)} = 1, \quad x(0) = 0, x(1) = 0, x'(0) = 0, x'(1) = 0, x'''(0) = 0, \tag{11}$$

$$x^{(5)} = 1, \quad x(0) = 0, x(1) = 0, x'(0) = 0, x'(1) = 0, x''(0) = 0, \tag{12}$$

$$x^{(5)} = 1, \quad x(0) = 0, x(1) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 0, x''(1) = 0. \tag{13}$$

Обозначим через $G_4(t,s)$, $G_5(t,s)$ и $G_6(t,s)$ функции Грина, соответственно, краевых задач (8)-(10). Тогда

$$G_4(t,s) = ((s^4 - 2s^3 + 2s - 1)t^4 + (-2s^4 + 6s^3 - 6s^2 + 2s)t^2)/24$$

$$= t^2(s-1)^3((s+1)t^2-2s)/24, \quad 0 \le t \le s \le 1,$$

$$G_4(t,s) = ((s^4-2s^3+2s)t^4-4st^3+(-2s^4+6s^3+2s)t^2-4s^3t+s^4)/24$$

$$= (t-1)^2 s((s^3-2s^2+2)t^2+(2s^3-4s^2)t+s^3)/24, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$G'_4(t,s) = ((s^4-2s^3+2s-1)t^3+(-s^4+3s^3-3s^2+s)t)/6$$

$$= t(s-1)^3((s+1)t^2-s)/6, \quad 0 \le t \le s \le 1,$$

$$G'_4(t,s) = ((s^4-2s^3+2s)t^3-3st^2+(-s^4+3s^3+s)t-s^3)/6$$

$$= (t-1)s((s^3-2s^2+2)t^2+(s^3-2s^2-1)t+s^2)/6, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$G''_4(t,s) = ((3s^4-6s^3+6s-3)t^2-s^4+3s^3-3s^2+s)/6$$

$$= (s-1)^3((3s+3)t^2-s)/6, \quad 0 \le t \le s \le 1,$$

$$G''_4(t,s) = ((3s^4-6s^3+6s)t^2-6st-s^4+3s^3+s)/6$$

$$= s((3s^3-6s^2+6)t^2-6t-s^3+3s^2+1)/6, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$G'''_4(t,s) = (s^4-2s^3+2s-1)t = t(s-1)^3(s+1), \quad 0 \le t \le s \le 1,$$

$$G'''_4(t,s) = (s^4-2s^3+2s)t-s = s((s^3-2s^2+2)t-1), \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$G''''_4(t,s) = s^4-2s^3+2s-1 = (s-1)^3(s+1), \quad 0 \le t \le s \le 1,$$

$$G''''_4(t,s) = s^4-2s^3+2s = s(s^3-2s+2), \quad 0 \le s \le t \le 1.$$

Для функции Грина $G_5(t,s)$ и ее производных получаем следующие выражения:

$$G_5(t,s) = ((3s^4-8s^3+6s^2-1)t^4+(-4s^4+12s^3-12s^2+4s)t^3)/24$$

$$= t^3(s-1)^3((3s+1)t-4s)/24, \quad 0 \le t \le s \le 1,$$

$$G_5(t,s) = ((3s^4-8s^3+6s^2)t^4+(-4s^4+12s^3-12s^2)t^3+6s^2t^2-4s^3t+s^4)/24$$

$$= (t-1)^2 s^2((3s^2-8s+6)t^2+(2s^2-4s)t+s^2)/24, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$G'_5(t,s) = ((3s^4-8s^3+6s^2-1)t^3+(-3s^4+9s^3-9s^2+3s)t^2)/6$$

$$= t^2(s-1)^3((3s+1)t-3s)/6, \quad 0 \le t \le s \le 1,$$

$$G'_5(t,s) = ((3s^4-8s^3+6s^2)t^3+(-3s^4+9s^3-9s^2)t^2+3s^2t-s^3)/6$$

$$= (t-1)s^2((3s^2-8s+6)t^2+(s-3)t+s)/6, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$G''_5(t,s) = ((3s^4-8s^3+6s^2-1)t^2+(-2s^4+6s^3-6s^2+2s)t)/2$$

$$= t(s-1)^3((3s+1)t-2s)/2, \quad 0 \le t \le s \le 1,$$

$$G''_5(t,s) = ((3s^4-8s^3+6s^2)t^2+(-2s^4+6s^3-6s^2)t+s^2)/2,$$

$$= s^2((3s^2-8s+6)t^2+(-2s^2+6s-6)t+1)/2, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$G_5'''(t,s) = (3s^4 - 8s^3 + 6s^2 - 1)t - s^4 + 3s^3 - 3s^2 + s$$
$$= (s-1)^3((3s+1)t - s), \quad 0 \le t \le s \le 1,$$
$$G_5'''(t,s) = (3s^4 - 8s^3 + 6s^2)t - s^4 + 3s^3 - 3s^2$$
$$= s^2((3s^2 - 8s + 6)t - s^2 + 3s - 3), \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$G_5''''(t,s) = 3s^4 - 8s^3 + 6s^2 - 1 = (s-1)^3(3s+1), \quad 0 \le t \le s \le 1,$$
$$G_5''''(t,s) = 3s^4 - 8s^3 + 6s^2 = s^2(3s^2 - 8s + 6), \quad 0 \le s \le t \le 1.$$

Для функции Грина $G_6(t,s)$ и ее производных получаем следующие выражения:

$$G_6(t,s) = ((s^4 - 4s^3 + 4s^2 - 1)t^4 + (-2s^4 + 8s^3 - 10s^2 + 4s)t^3)/24$$
$$= t^3(s-1)^2((s^2 - 2s - 1)t - 2s^2 + 4s)/24, \quad 0 \le t \le s \le 1,$$
$$G_6(t,s) = ((s^4 - 4s^3 + 4s^2)t^4 + (-2s^4 + 8s^3 - 10s^2)t^3 + 6s^2t^2 - 4s^3t + s^4)/24$$
$$= (t-1)s^2((s^2 - 4s + 4)t^3 + (-s^2 + 4s - 6)t^2 + (-s^2 + 4s)t - s^2)/24, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$G_6'(t,s) = ((2s^4 - 8s^3 + 8s^2 - 2)t^3 + (-3s^4 + 12s^3 - 15s^2 + 6s)t^2)/12$$
$$= t^2(s-1)^2((2s^2 - 4s - 2)t - 3s^2 + 6s)/12, \quad 0 \le t \le s \le 1,$$
$$G_6'(t,s) = ((2s^4 - 8s^3 + 8s^2)t^3 + (-3s^4 + 12s^3 - 15s^2)t^2 + 6s^2t - 2s^3)/12$$
$$= s^2((2s^2 - 8s + 8)t^3 + (-3s^2 + 12s - 15)t^2 + 6t - 2s)/12, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$G_6''(t,s) = ((s^4 - 4s^3 + 4s^2 - 1)t^2 + (-s^4 + 4s^3 - 5s^2 + 2s)t)/2$$
$$= t(s-1)^2((s^2 - 2s - 1)t - s^2 + 2s)/2, \quad 0 \le t \le s \le 1,$$
$$G_6''(t,s) = ((s^4 - 4s^3 + 4s^2)t^2 + (-s^4 + 4s^3 - 5s^2)t + s^2)/2$$
$$= (t-1)s^2((s^2 - 4s + 4)t - 1)/2, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$G_6'''(t,s) = ((2s^4 - 8s^3 + 8s^2 - 2)t - s^4 + 4s^3 - 5s^2 + 2s)/2$$
$$= (s-1)^2((2s^2 - 4s - 2)t - s^2 + 2s)/2, \quad 0 \le t \le s \le 1,$$
$$G_6'''(t,s) = ((2s^4 - 8s^3 + 8s^2)t - s^4 + 4s^3 - 5s^2)/2$$
$$= s^2((2s^2 - 8s + 8)t - s^2 + 4s - 5)/2, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$G_6''''(t,s) = s^4 - 4s^3 + 4s^2 - 1 = (s-1)^2(s^2 - 2s - 1), \quad 0 \le t \le s \le 1,$$
$$G_6''''(t,s) = s^4 - 4s^3 + 4s^2 = s^2(s^2 - 4s + 4), \quad 0 \le s \le t \le 1.$$

Обозначим через $x_4(t)$, $x_5(t)$ и $x_6(t)$ соответственно решения задач (11)-(13). Тогда имеем

$$x_4(t) = (2t^5 - 3t^4 + t^2)/240 = t^2(t-1)^2(2t+1)/240,$$

$$x_4^{'}(t) = (5t^4 - 6t^3 + t)/120 = t(t-1)(5t^2 - t - 1)/120,$$

$$x_4^{''}(t) = (20t^3 - 18t^2 + 1)/120,$$
$$x_4^{'''}(t) = (5t^2 - 3t)/10 = t(5t-3)/10, \quad x_4^{''''}(t) = (10t - 3)/10;$$

Тогда легко проверить, что

$$M_{40} = x_4((1+\sqrt{21})/10) = 0.00053631212, \quad M_{41} = 0.0018988450,$$

$$M_{42} = 0.025, \quad M_{43} = 0.2, \quad M_{44} = 0.7$$

Для решения $x_5(t)$ и его производных получаем следующие выражения

$$x_5(t) = (t^5 - 2t^4 + t^3)/120 = t^3(t-1)^2/120,$$

$$x_5^{'}(t) = (5t^4 - 8t^3 + 3t^2)/120 = t^2(t-1)(5t-1)/120,$$

$$x_5^{''}(t) = (10t^3 - 12t^2 + 3t)/60 = t(10t^2 - 12t + 3)/60,$$

$$x_5^{'''}(t) = (10t^2 - 8t + 1)/20, \quad x_5^{''''}(t) = (5t - 2)/5;$$

Тогда легко проверить, что

$$M_{50} = 0.000288, \quad M_{51} = -x_5{'}((6+\sqrt{6})/10) = 0.0011297959,$$

$$M_{52} = 1/60 = 0.0166666667, \quad M_{53} = 0.15, \quad M_{54} = 0.6.$$

Для решения $x_6(t)$ и его производных получаем следующие выражения

$$x_6(t) = (3t^5 - 7t^4 + 4t^3)/360 = t^3(t-1)(3t-4)/360,$$

$$x_6^{'}(t) = (15t^4 - 28t^3 + 12t^2)/360 = t^2(15t^2 - 28t + 12)/360,$$

$$x_6^{''}(t) = (5t^3 - 7t^2 + 2t)/30 = t(t-1)(5t-2)/30,$$

$$x_6^{'''}(t) = (15t^2 - 14t + 2)/30, \quad x_6^{''''}(t) = (15t - 7)/15.$$

Тогда легко проверить, что

$$M_{60} = x_6(2/3) = 0.00054869684, \quad M_{61} = 1/360 = 0.0027777778,$$

$$M_{62} = -x_6{''}((7+\sqrt{19})/15) = 0.010945094, \quad M_{63} = 0.1,$$
$$M_{64} = 8/15 = 0.5333333333.$$

Пусть для $s \in (0,1)$ $\quad f_s(t) = -1$, если $t \in [0,s]$ и $f_s(t) = 1$ для $t \in (s,1]$. Обозначим для таким образом выбранного $f_s(t)$, соответственно, x_{4s}, $\quad x_{5s}$ и x_{6s} решения краевых задач (11)-(13). Непосредственно интегрируя, получаем:

$$x_{4s} = (-2t^5 + (-4s^5 + 10s^4 - 20s^2 + 20s - 3)t^4 + (8s^5 - 30s^4 + 40s^3 - 20s^2 + 1)t^2)/240$$

$$= t^2(-2t^3 + (-4s^5 + 10s^4 - 20s^2 + 20s - 3)t^2 + 8s^5 - 30s^4 + 40s^3 - 20s^2 + 1)/240,$$
$$0 \le t \le s \le 1,$$
$$x_{4s} = (2t^5 + (-4s^5 + 10s^4 - 20s^2 - 3)t^4 + 40s^2t^3 + (8s^5 - 30s^4 - 20s^2 + 1)t^2$$
$$+20s^4t - 4s^5)/240$$
$$= (t-1)^2(2t^3 + (-4s^5 + 10s^4 - 20s^2 + 1)t^2 + (-8s^5 + 20s^4)t - 4s^5)/240,$$
$$0 \le s \le t \le 1;$$

$$x'_{4s} = (-5t^4 + (-8s^5 + 20s^4 - 40s^2 + 40s - 6)t^3 + (8s^5 - 30s^4 + 40s^3 - 20s^2 + 1)t)/120$$

$$= t(-5t^3 + (-8s^5 + 20s^4 - 40s^2 + 40s - 6)t^2 + 8s^5 - 30s^4 + 40s^3 - 20s^2 + 1)/120$$
$$0 \le t \le s \le 1,$$
$$x'_{4s} = (5t^4 + (-8s^5 + 20s^4 - 40s^2 - 6)t^3 + 60s^2t^2 + (8s^5 - 30s^4 - 20s^2$$
$$+1)t + 10s^4)/120 = (t-1)(5t^3 + (-8s^5 + 20s^4 - 40s^2 - 1)t^2 + (-8s^5$$
$$+20s^4 + 20s^2 - 1)t - 10s^4)/120, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$x''_{4s} = (-20t^3 + (-24s^5 + 60s^4 - 120s^2 + 120s - 18)t^2 + 8s^5 - 30s^4$$
$$+40s^3 - 20s^2 + 1)/120, \quad 0 \le t \le s \le 1,$$
$$x''_{4s} = (20t^3 + (-24s^5 + 60s^4 - 120s^2 - 18)t^2 + 120s^2t + 8s^5 - 30s^4$$
$$-20s^2 + 1)/120 \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$x'''_{4s} = t(-5t - 4s^5 + 10s^4 - 20s^2 + 20s - 3)/10, \quad 0 \le t \le s \le 1,$$
$$x'''_{4s} = (5t^2 + (-4s^5 + 10s^4 - 20s^2 - 3)t + 10s^2)/10, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$x''''_{4s} = (-10t - 4s^5 + 10s^4 - 20s^2 + 20s - 3)/10, \quad 0 \le t \le s \le 1,$$
$$x''''_{4s} = (+10t - 4s^5 + 10s^4 - 20s^2 - 3)/10, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$x_{5s} = (-t^5 + (-6s^5 + 20s^4 - 20s^3 + 10s - 2)t^4 + (8s^5 - 30s^4 + 40s^3$$
$$-20s^2 + 1)t^3)/120 = t^3(-t^2 + (-6s^5 + 20s^4 - 20s^3 + 10s - 2)t + 8s^5$$
$$-30s^4 + 40s^3 - 20s^2 + 1)/120, \quad 0 \le t \le s \le 1,$$
$$x_{5s} = (t^5 + (-6s^5 + 20s^4 - 20s^3 - 2)t^4 + (8s^5 - 30s^4 + 40s^3 + 1)t^3$$

$$-20s^3t^2+10s^4t-2s^5)/120=(t-1)^2(t^3+(-6s^5+20s^4-20s^3)t^2$$
$$+(-4s^5+10s^4)t-2s^5)/120,\quad 0\le s\le t\le 1;$$

$$x'_{5s}=(-5t^4+(-24s^5+80s^4-80s^3+40s-8)t^3+(24s^5-90s^4$$
$$+120s^3-60s^2+3)t^2)/120=t^2(-5t^2+(-24s^5+80s^4-80s^3+40s-8)t$$
$$+24s^5-90s^4+120s^3-60s^2+3)/120,\quad 0\le t\le s\le 1,$$
$$x'_{5s}=(5t^4+(-24s^5+80s^4-80s^3-8)t^3+(24s^5-90s^4+120s^3+3)t^2$$
$$-40s^3t+10s^4)/120=(t-1)(5t^3+(-24s^5+80s^4-80s^3-3)t^2+(-10s^4$$
$$+40s^3)t-10s^4)/120,\quad 0\le s\le t\le 1;$$

$$x''_{5s}=t(-10t^2+(-36s^5+120s^4-120s^3+60s-12)t+24s^5-90s^4$$
$$+120s^3-60s^2+3)/60,\quad 0\le t\le s\le 1,$$
$$x''_{5s}=(10t^3+(-36s^5+120s^4-120s^3-12)t^2+(24s^5-90s^4$$
$$+120s^3+3)t-20s^3)/60\quad 0\le s\le t\le 1;$$

$$x'''_{5s}=(-10t^2+(-24s^5+80s^4-80s^3+40s-8)t+8s^5-30s^4$$
$$+40s^3-20s^2+1)/20,\quad 0\le t\le s\le 1,$$
$$x'''_{5s}=(10t^2+(-24s^5+80s^4-80s^3-8)t+8s^5-30s^4$$
$$+40s^3+1)/20,\quad 0\le s\le t\le 1;$$

$$x''''_{5s}=(-5t-6s^5+20s^4-20s^3+10s-2)/5,\quad 0\le t\le s\le 1,$$
$$x''''_{5s}=(5t-6s^5+20s^4-20s^3-2)/5,\quad 0\le s\le t\le 1;$$

$$x_{6s}=(-3t^5+(-6s^5+30s^4-40s^3+30s-7)t^4+(12s^5-60s^4+100s^3$$
$$-60s^2+4)t^3)/360=t^3(-3t^2+(-6s^5+30s^4-40s^3+30s-7)t+12s^5$$
$$-60s^4+100s^3-60s^2+4)/360,\quad 0\le t\le s\le 1,$$
$$x_{6s}=(3t^5+(-6s^5+30s^4-40s^3-7)t^4+(12s^5-60s^4+100s^3+4)t^3$$
$$-60s^3t^2+30s^4t-6s^5)/360=(t-1)(3t^4+(-6s^5+30s^4-40s^3-4)t^3+(6s^5$$
$$-30s^4+60s^3)t^2+(6s^5-30s^4)t+6s^5)/360,\quad 0\le s\le t\le 1;$$

$$x'_{6s}=(-15t^4+(-24s^5+120s^4-160s^3+120s-28)t^3+(36s^5-180s^4+300s^3$$
$$-180s^2+12)t^2)/360=t^2(-15t^2+(-24s^5+120s^4-160s^3+120s-28)t+36s^5$$
$$-180s^4+300s^3-180s^2+12)/360,\quad 0\le t\le s\le 1,$$

$$x'_{6s} = (15t^4 + (-24s^5 + 120s^4 - 160s^3 - 28)t^3 + (36s^5 - 180s^4 + 300s^3 + 12)t^2$$
$$-120s^3t + 30s^4)/360, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$x''_{6s} = (-5t^3 + (-6s^5 + 30s^4 - 40s^3 + 30s - 7)t^2 + (6s^5 - 30s^4 + 50s^3 - 30s^2 + 2)t)/30$$
$$= t(-5t^2 + (-6s^5 + 30s^4 - 40s^3 + 30s - 7)t + 6s^5 - 30s^4 + 50s^3 - 30s^2 + 2)/30,$$
$$0 \le t \le s \le 1,$$
$$x''_{6s} = (5t^3 + (-6s^5 + 30s^4 - 40s^3 - 7)t^2 + (6s^5 - 30s^4 + 50s^3 + 2)t - 10s^3)/30$$
$$= (t-1)(5t^2 + (-6s^5 + 30s^4 - 40s^3 - 2)t + 10s^3)/30, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

$$x'''_{6s} = (-15t^2 + (-12s^5 + 60s^4 - 80s^3 + 60s - 14)t + 6s^5 - 30s^4 + 50s^3 - 30s^2 + 2)/30,$$
$$0 \le t \le s \le 1,$$

$$x'''_{6s} = (15t^2 + (-12s^5 + 60s^4 - 80s^3 - 14)t + 6s^5 - 30s^4 + 50s^3 + 2)/30,$$
$$0 \le s \le t \le 1;$$

$$x''''_{6s} = (-15t - 6s^5 + 30s^4 - 40s^3 + 30s - 7)/15, \quad 0 \le t \le s \le 1,$$
$$x''''_{6s} = (15t - 6s^5 + 30s^4 - 40s^3 - 7)/15, \quad 0 \le s \le t \le 1;$$

Обозначим через $t_{imk}(s)$, $\quad i \in \{4,5,6\}$, $\quad m \in \{1,2,3\}$, $\quad k \in \{1,2\}$ корни $G_i^{(m)}(t,s)$. Здесь k - номер корня. Следующие таблицы показывают, что $t_{imk}(s)$ монотонны.

Таблица 1. $t_{4mk}(s)$

s	$t_{411}(s)$	$t_{421}(s)$	$t_{422}(s)$	$t_{431}(s)$
0.1	0.5043	0.2190	0.7905	0.5048
0.2	0.5158	0.2416	0.7957	0.5187
0.3	0.5328	0.2774	0.8037	0.5414
0.4	0.5548	0.3086	0.8145	0.5734
0.5	0.5817	0.3333	0.8283	0.6154
0.6	0.6124	0.3536	0.8459	0.6684
0.7	0.6417	0.3705	0.8682	0.7337
0.8	0.6667	0.3849	0.8972	0.8117
0.9	0.6882	0.3974	0.9369	0.9017

Таблица 2. $t_{5mk}(s)$

s	$t_{511}(s)$	$t_{521}(s)$	$t_{522}(s)$	$t_{531}(s)$	$t_{532}(s)$
0.1	0.5175	0.2402	0.7961	0.0769	0.5182
0.2	0.5371	0.2749	0.8047	0.1250	0.5398
0.3	0.5590	0.3172	0.8145	0.1578	0.5659
0.4	0.5837	0.3636	0.8260	0.1818	0.5976
0.5	0.6120	0.4000	0.8396	0.2000	0.6364
0.6	0.6440	0.4286	0.8561	0.2142	0.6842
0.7	0.6774	0.4516	0.8765	0.2258	0.7433
0.8	0.7059	0.4706	0.9030	0.2352	0.8158
0.9	0.7297	0.4865	0.9396	0.2432	0.9024

Таблица 3. $t_{6mk}(s)$

s	$t_{611}(s)$	$t_{621}(s)$	$t_{631}(s)$	$t_{632}(s)$
0.1	0.5931	0.2770	0.0798	0.6385
0.2	0.6090	0.3086	0.1323	0.6543
0.3	0.6264	0.3460	0.1688	0.6730
0.4	0.6455	0.3902	0.1951	0.6953
0.5	0.6667	0.4285	0.2142	0.7222
0.6	0.6900	0.4565	0.2282	0.7551
0.7	0.7147	0.4764	0.2382	0.7959
0.8	0.7347	0.4898	0.2448	0.8472
0.9	0.7462	0.4975	0.2487	0.9132

Следующие таблицы показывают, что $\|x_{is}^{(m)}\|_C$ принимает наибольшее значение при $s = 0$ и $s = 1$, что на основании формулы (3) доказывает $Y_{im} = \{x_g, x_{-g}\}, \quad i = 4, 5, 6, \quad m = 1, 2, 3$.

Таблица 4. $x_{4s}^{(m)}$

s	t	x'_{4s}	t	x''_{4s}	t	x'''_{4s}
0.0	0.827	-0.00190	1.000	0.02500	1.000	0.20000
0.1	0.830	-0.00175	1.000	0.02336	1.000	0.19010
0.2	0.838	-0.00132	1.000	0.01869	1.000	0.16147
0.3	0.860	-0.00072	1.000	0.01170	1.000	0.11713
0.4	0.612	0.00036	1.000	0.00337	1.000	0.06150
0.5	0.750	0.00081	1.000	0.00521	0.750	-0.03125
0.6	0.792	0.00133	1.000	-0.01297	0.922	-0.06458
0.7	0.812	0.00168	1.000	-0.01905	1.000	-0.11713
0.8	0.823	0.00185	1.000	-0.02296	1.000	-0.16147
0.9	0.827	0.00190	1.000	-0.02471	1.000	-0.19010
1.0	0.827	0.00190	1.000	-0.02500	1.000	-0.20000

Таблица 5. $x_{5s}^{(m)}$

s	t	x'_{5s}	t	x''_{5s}	t	x'''_{5s}
0.0	0.845	-0.00113	1.000	0.01667	1.000	0.15000
0.1	0.846	-0.00110	1.000	0.01638	1.000	0.14824
0.2	0.850	-0.00096	1.000	0.01473	1.000	0.13774
0.3	0.862	-0.00067	1.000	0.01123	1.000	0.11431
0.4	0.892	-0.00029	1.000	0.00609	1.000	0.07781
0.5	0.711	0.00034	0.500	0.00260	1.000	0.03125
0.6	0.795	0.00067	1.000	-0.00609	0.839	-0.33183
0.7	0.824	0.00094	1.000	-0.01123	1.000	-0.07021
0.8	0.839	0.00109	1.000	-0.01474	1.000	-0.11214
0.9	0.844	0.00112	1.000	-0.01638	1.000	-0.14014
1.0	0.845	0.00113	1.000	-0.01667	1.000	-0.15000

Таблица 6. $x_{6s}^{(m)}$

s	t	x'_{6s}	t	x''_{6s}	t	x'''_{6s}
0.0	1.000	-0.00278	0.757	-0.01095	1.000	0.10000
0.1	1.000	-0.00273	0.758	-0.01080	1.000	0.09909
0.2	1.000	-0.00246	0.765	-0.00992	1.000	0.09354
0.3	1.000	-0.00187	0.780	-0.00798	1.000	0.08061
0.4	1.000	-0.00101	0.811	-0.00506	1.000	0.05955
0.5	0.711	0.00033	0.500	0.00260	1.000	0.03125
0.6	1.000	0.00101	0.619	0.00498	0.000	-0.04738
0.7	1.000	0.00187	0.696	0.00788	0.000	-0.05815
0.8	1.000	0.00246	0.739	0.00994	1.000	-0.06794
0.9	1.000	0.00273	0.755	0.01082	1.000	-0.09100
1.0	1.000	0.00278	0.757	0.01095	1.000	-0.10000

Список литературы

1. Лепин А.Я., Лепин Л.А., О некоторых краевых задачах для уравне-ния n - го порядка, Mathematics. Differential Equations, Riga, Univ. of Latvia, Inst. Math. and Comp. Sci., Vol. 6 (2006), pp. 28-34.

2. Н.И. Васильев, А.Я. Лепин, Л.А. Лепин. Экстремальные решения краевых задач (в печати).

N.I. Vasilyev. Extremal solutions of boundary value problems for the fifth order ordinary differential equations

Summary. The extremal solutions for the fifth order two-point boundary value problems for the simplest differential equation are considered.

1991 MSC 34B99

N.I. Vasiļjevs. Piektās kārtas parasto diferenciālvienādojumu robežproblēmu ekstremālie atrisinājumi

Anotācija. Konstruēti ekstremāli atrisinājumi piektās kārtas vienkāršajām parastajam diferenciālvienādojumam.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 22.12.2009