Об экстремалях некоторых функционалов на плоскости

Ю.А. Клоков.

Аннотация. Изучаются экстремали функционала

$$I(l) = \int_0^1 [p(x,y)x'^2 + q(x,y)y'^2]^{\frac{1}{2}} dt$$

с краевыми условиями $x(0) = y(0) = 0 \quad x(1) = A, \quad y(1) = B.$

Библ. 4 назв.

УДК 517.927

Рассмотрим функционал

$$I(l) = \int_0^1 [p(x,y)x'^2 + q(x,y)y'^2]^{\frac{1}{2}} dt \tag{1}$$

где $p, q \geq 0, \quad \forall (x,y) \in R^2, \quad p, q \in C^1(R^2), \quad x(t), y(t) \in C^2, \quad I = [0,1]$
с краевыми условиями

$$x(0) = y(0) = 0, \quad x(1) = A, \quad y(1) = B. \tag{2}$$

Уравнения экстремалей имеют вид [1, стр.242].

$$x'' = \frac{1}{p}[x'^2(-\frac{1}{2}p'_x) + x'y'(-p'_y) + y'^2(\frac{1}{2}q'_x)] \tag{3}$$

$$y'' = \frac{1}{q}[x'^2(\frac{1}{2}p'_y) + x'y'(-q'_x) + y'^2(-\frac{1}{2}q'_y)] \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть существуют $a, b \in R^2$ такие, что

$$(x-a)q'_x \geq 0, \quad (y-b)p'_y \geq 0, \quad \forall (x,y) \in R^2,$$

тогда решение задачи (2)-(4) существует для любых $A, B \in R^2$. Доказательство теоремы 1 см. [2]. Приведем примеры, показывающие существенность сформулированных условий.

Пример 1. Пусть $p = q = \exp(-2\sigma y), \quad \forall (x,y) \in R^2, \quad \sigma > 0$ - постоянная. Тогда система (3), (4) запишется в виде

$$x'' = 2\sigma x'y', \quad y'' = -\sigma x'^2 + \sigma y'^2. \tag{5}$$

Из первого уравнения следует, что $x(t)$ изменяется монотонно и поэтому в качестве независимой переменной можно взять x, $0 \le x \le A$ (при A>0). Обозначим $y(t) = y(t(x)) = z(x)$, так что $z(0) = 0, \quad z(A) = B, \quad z'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} \quad z''(x) = \frac{1}{x'^3_t}[x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}]$. Из системы (5) следует $z''(t) = -\sigma(1 + z'^2(x))$. Интегрируя это уравнение, найдем

$$z(x) = \frac{1}{\sigma}\ln\left[\cos\sigma x + \frac{\sin\sigma x}{\sin\sigma A}(e^{\sigma B} - \cos\sigma A)\right].$$

Откуда видно, что решение задачи (2), (5) существует только в полосе

$$|A| < \sigma^{-1}\cdot\pi, \quad \forall B \in R.$$

Заметим, что это решение единственно.

Пример 2. Пусть $p = (1 - (\frac{2}{3})y^3)^{-1}, \quad y \le 0$, и $p \equiv 1, \quad y > 0, \quad q = p^2, \quad \forall(x,y) \in R^2$. Подставляя в уравнения (3), (4) найдем, для $y \ge 0, \quad x'' = 0, \quad y'' = 0$, а для $y \le 0$,

$$\begin{gathered} x'' = -x'y'\frac{2y^2}{[1-\frac{2}{3}y^3]}; \\ y'' = \frac{1}{q}\left[x'^2\frac{y^2}{[1-\frac{2}{3}y^3]^2} - y'^2\frac{2y^2}{[1-\frac{2}{3}y^3]^3}\right]. \end{gathered} \tag{6}$$

Рассуждая так же, как и в предыдущем примере, найдем из (6)

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 0 \quad (z \ge 0), \quad \frac{d^2z}{dx^2} = z^2 \quad (z \le 0) \quad (0 \le x \le A) \tag{7}$$

Для $z \ge 0$ имеем $z(x) = z'(0)x$ и решение краевой задачи имеет вид $z(x) = \frac{B}{A}x$.

Рассмотрим теперь случай $z \le 0$.

Обозначим через $z_0(x), \quad 0 \le x < \infty$ функцию, которая является решением уравнения $z'' = z^2$ при $z \le 0$ и решением уравнения $z'' = 0$, для $z \ge 0$ и которая удовлетворяет условиям $z_0(0) = 0, \quad z'_0(0) = -1$. Эта функция вначале будет монотонно убывать, а потом будет монотонно возрастать, и при некотором $x = c > 0$, она пересечет ось x и далее ее уравнение может быть записано в виде $z_0(x) = z'_0(c)(x - c), \quad c \le x < \infty$.

Рассмотрим теперь для уравнения (7), $z'' = z^2$, задачу Коши

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = -\sigma \quad (\sigma > 0) \tag{8}$$

Легко проверить, что решением задачи (7), (8) (для $z \le 0$) будет функция

$$z = \sigma^{\frac{2}{3}} z_0(\sigma^{\frac{1}{3}}x) \tag{9}$$

При фиксированном x, эта функция, как функция параметра σ будет иметь отрицательный минимум. Дифференцируя (9) по σ, получим в точке минимума уравнение $2z_0(s) + sz'_0(s) = 0$, где $s = \sigma^{\frac{1}{3}}x$

Можно показать, что это уравнение имеет единственное решение $s = s_0$, так что $s_0 = \sigma^{\frac{1}{3}} x$, Теперь из (9) находим уравнение огибающей (для семейства решений зависящих от параметра σ)

$$z = \frac{s_0^2 z_0(s_0)}{x^2}.$$

Из этих рассуждений следует, что если $B < A^{-2} s_0^2 z_0(s_0)$, то задача (6) решения не имеет.

Если $B = A^{-2} s_0^2 z_0(s_0)$, то решение существует и единственно. При $B > A^{-2} s_0^2 z_0(s_0)$ существуют два решения. При $A < 0$ картина аналогичная. Можно показать (на чем мы не останавливаемся), что при $A = 0$ решение существует для любого $B \in R$.

II. В этом пункте рассмотрим функционал

$$I_*(l) = \int\limits_0^1 \left[-p(x,y)x'^2 + q(x,y)y'^2\right]^{\frac{1}{2}} dt, \tag{10}$$

где $p, q > 0, \quad \forall (x,y) \in R^2, \quad p, q \in C^1(R^2)$ с граничными условиями (2). Функционалы такого типа представляют интерес в теоретической физике [3,гл.III]. Такие функционалы определяют геометрию Минковского (на плоскости) см. [4]. Уравнения геодезических линий принимают вид

$$x'' = -\frac{1}{2p}\left[x'^2 p'_x + 2x'y'p'_y + y'^2 {q'_x}^2\right] \tag{11}$$

$$y'' = -\frac{1}{2q}\left[x'^2 p'_y + 2x'y'q'_x + y'^2 q'_y\right] \tag{12}$$

Теорема 2. Пусть существуют такие $a, b \in R^2$, что $(x-a)q'_x \le 0, \quad (y-b)p'_y \le 0, \quad \forall (x,y) \in R^2$. Тогда решение задачи (11), (12), (2) существует для любых $(A, B) \in R^2$. Доказательство аналогично тому, которое дано при доказательстве теоремы 1. Приведем пример достаточных условий для существования решения задачи (11), (12), (2). Пусть

$$p = \exp(-\frac{1}{2}(y-b)^2 + \varphi_1(x)), \quad q = \exp[-\frac{1}{2}(x-a)^2 + \varphi_2(y)] \quad \varphi_1, \varphi_2 \in C^1(R^2).$$

Тогда решение задачи (11),(12),(2) существует для любых $(A, B) \in R^2$. Приведем два примера, когда условия теоремы 2 не выполняются.

Пример 3. Пусть $p = q = \exp(-2\sigma y), \quad \forall (x,y) \in R^2$, где $\sigma > 0$- постоянная. Тогда система (11), (12) запишется в виде

$$x'' = 2\sigma x'y', \quad y'' = \sigma x'^2 + \sigma y'^2.$$

Теперь, рассуждая так же как и в случае примера 1, получим задачу

$$z'' = -\sigma(z'^2 - 1), \quad z(0) = 0, \quad z(A) = B \tag{13}$$

Откуда следует

$$\frac{z''}{z'^2 - 1} = -\sigma, \quad \frac{1}{2}\ln\frac{z'-1}{z'+1} \cdot \frac{z'_0 + 1}{z'_0 - 1} = -\sigma, \quad (z'_0 = z'(0)).$$

Далее имеем

$$z' = \frac{(z_0'+1)e^{\sigma x} + (z_0'-1)e^{-\sigma x}}{(z_0'+1) - (z_0'-1)e^{-\sigma x}}$$

$$z = \frac{1}{\sigma}\ln\left[\frac{(z_0'+1)e^{\sigma x} - (z_0'-1)e^{-\sigma x}}{2}\right]$$

$$z = \frac{1}{\sigma}\ln(\operatorname{ch}\sigma x + z_0'\operatorname{sh}\sigma x), \quad z = \frac{1}{\sigma}\ln\left(\operatorname{ch}\sigma x + \frac{\operatorname{sh}\sigma x}{\operatorname{sh}\sigma A}(e^{B\sigma} - \operatorname{ch}\sigma A)\right);$$

Заметим, что если в случае примера 1 решение существовало в полосе $|x| < \sigma^{-1} \cdot \pi, \quad B \in R$, то в данном случае решение существует для любых A и B.

Пример 4. Пусть p и q точно такие же, как в случае примера 2. Тогда рассуждая, как и в случае примера 2, найдем уравнения

$$z'' = 0, \quad z \geq 0,$$

и

$$z'' = -z^2 \tag{14}$$

для $z \leq 0$. Откуда следует, что задача (14) имеет решение (единственное) для любых $(A, B) \in R^2, \quad A > 0$. В случае $A < 0$, задача также имеет единственное решение для любого $B \in R$. В случае $A = 0$ можно показать, что решение задачи (11), (12) существует для любого $B \in R$. В случае примера 2 решение существовало, лишь если $B \geq A^{-2}s_0^2 z_0(s_0)$.

Литература

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. 1951, т. IV, М.-Л.

2. Дифференциальные уравнения. 2007, т.43, N 4, стр. 443 - 448.

3. Франкфурт У.И. Специальная и общая теория относительности. М., 1968.

4. Сазанов А.А. Четырехмерный мир Минковского. Москва, "Наука", 1988.

A.Yu. Klokovs. On extremals of some functionals in a plane
Summary. Extremals of the functional

$$I(l) = \int_0^1 [p(x,y)x'^2 + q(x,y)y'^2]^{\frac{1}{2}} dt$$

with the boundary conditions $x(0) = y(0) = 0 \quad x(1) = A, \quad y(1) = B$ are studied.
1991 MSC 34B15

J. Klokovs. Par funkcionāļa ekstremālem plaknē

Anotācija. Tiek pētītas funkcionāļa

$$I(l) = \int_0^1 [p(x,y)x'^2 + q(x,y)y'^2]^{\frac{1}{2}} dt$$

ekstremāles ar robežnosacījumiem $x(0) = y(0) = 0, \quad x(1) = A, \quad y(1) = B.$

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 22.09.2009