Об экстремалях одного функционала

Ю.А.Клоков

Аннотация. Изучаются экстремали функционала

$$I(l) = \int_0^1 (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} v^{-1}(x, y, z) dt \tag{1}$$

где $v > 0$, $\forall (x, y, z) \in R^3$, $v \in C^1(R^3)$, $x(t), y(t), z(t) \in C^2(I)$, $I = [0, 1]$.
Библ. 4 назв.

УДК 517.927.4

Эта статья продолжает исследования, начатые в работах [2]-[4]. Так как $v > 0$, то можно определить функцию $\varphi \in C^1(R^3)$, $v = \exp \varphi(x, y, z)$. Тогда интересующие нас экстремали функционала (1) будут решениями краевой задачи (см.[1], с.242)

$$x'' = \varphi_x(x'^2 - y'^2 - z'^2) + 2\varphi_y x'y' + 2\varphi_z x'z', \tag{2}$$

$$y'' = \varphi_y(-x'^2 + y'^2 - z'^2) + 2\varphi_x x'y' + 2\varphi_z y'z', \tag{3}$$

$$z'' = \varphi_z(-x'^2 - y'^2 + z'^2) + 2\varphi_x x'z' + 2\varphi_y y'z', \tag{4}$$

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad x(1) = a, \quad y(1) = b, \quad z(1) = c, \tag{5}$$

где $\varphi_x = (\varphi)'_x$, $\varphi_y = (\varphi)'_y$, $\varphi_z = (\varphi)'_z$.
Не уменьшая общности, будем считать, что $\varphi(0, 0, 0) = 0$.

Теорема 1 *Пусть существует $H > 0$ такое, что*

$$1 - x\varphi_x - y\varphi_y - z\varphi_z \geq 0 \quad \forall (x^2 + y^2 + z^2 \geq H^2). \tag{6}$$

Тогда задача (2)-(5) имеет решение для любых $a, b, c \in R^3$.

Доказательство этой теоремы см.[4]. Нас будут интересовать функционалы, которые не удовлетворяют условиям (6). Простейшей функцией, которая не удовлетворяет условию (6), является

$$\varphi(x, y, z) = px + qy + rz, \quad (p, q, r \in R). \tag{7}$$

Постараемся найти условия на (a,b,c), при которых задача (2)-(5), (7) имеет решение.

Так как $\varphi(x,y,z)=px+qy+rz$, то система (2)-(6), (5) примет вид

$$x''=p(x'^2-y'^2-z'^2)+2qx'y'+2rx'z',$$

$$y''=q(-x'^2+y'^2-z'^2)+2px'y'+2ry'z',$$

$$z''=r(-x'^2-y'^2+z'^2)+2px'z'+2qy'z'.$$

Перепишем эту систему в виде

$$x''=2x'(px'+qy'+rz')-p(x'^2+y'^2+z'^2), \tag{8}$$

$$y''=2y'(px'+qy'+rz')-q(x'^2+y'^2+z'^2), \tag{9}$$

$$z''=2z'(px'+qy'+rz')-r(x'^2+y'^2+z'^2). \tag{10}$$

Интегрируя систему (8)-(10) от $t=0$ до $t\geq 0$, получим

$$x'=x'_0e^{2\varphi(t)}-e^{2\varphi(t)}\int_0^t e^{-2\varphi(s)}p(x'^2+y'^2+z'^2)ds, \tag{11}$$

$$y'=y'_0e^{2\varphi(t)}-e^{2\varphi(t)}\int_0^t e^{-2\varphi(s)}q(x'^2+y'^2+z'^2)ds, \tag{12}$$

$$z'=z'_0e^{2\varphi(t)}-e^{2\varphi(t)}\int_0^t e^{-2\varphi(s)}r(x'^2+y'^2+z'^2)ds, \tag{13}$$

где $\varphi(t)=px(t)+qy(t)+rz(t)$.

Умножая (11) на q, (12) на p и вычитая, найдем

$$qx'-py'=e^{2\varphi(t)}(qx'_0-py'_0). \tag{14}$$

И аналогично, из (11), (13) и (12), (13) получим

$$rx'-pz'=e^{2\varphi(t)}(rx'_0-pz'_0), \tag{15}$$

$$ry'-qz'=e^{2\varphi(t)}(ry'_0-qz'_0). \tag{16}$$

Разделив (14) на (15), получим

$$\frac{qx'-py'}{rx'-pz'}=\frac{qx'_0-py'_0}{rx'_0-pz'_0}$$

или

$$(qx'-py')(rx'_0-pz'_0)=(rx'-pz')(qx'_0-py'_0). \tag{17}$$

И аналогично, из (15), (16) найдем

$$(rx'-pz')(ry'_0-qz'_0)=(ry'-qz')(rx'_0-pz'_0). \tag{18}$$

Интегрируя (17), (18) от $t=0$ до $t=1$, найдем

$$(qa-pb)(rx'_0-pz'_0)=(ra-pc)(qx'_0-py'_0), \tag{19}$$

$$(ra-pc)(ry_0'-qz_0')=(rb-qc)(rx_0'-pz_0'). \tag{20}$$

Из (17), (19) и (18), (20) получим

$$(qx'-py')(ra-pc)=(rx'-pz')(qa-pb), \tag{21}$$

$$(rx'-pz')(rb-qc)=(ry'-qz')(ra-pc). \tag{22}$$

Из (21) находим

$$x'(rb-qc)-y'(ra-pc)+z'(qa-pb)=0. \tag{23}$$

Аналогичное равенство следует из (22).

Предположим, что $qa-pb\neq 0$. Тогда из (23) находим

$$z'=x'\frac{qc-rb}{qa-pb}+y'\frac{ra-pc}{qa-pb}. \tag{24}$$

Исключая z' из (8) и (9), получим

$$x''=x'^2(p-pa_0^2+2ra_0)+2x'y'(q+rb_0-pa_0b_0)+y'^2(-p-pb_0^2), \tag{25}$$

$$y''=x'^2(-q-qa_0^2)+2x'y'(p+ra_0-qa_0b_0)+y'^2(q-qb_0^2+2rb_0), \tag{26}$$

где

$$a_0=\frac{qc-rb}{qa-pb},\quad b_0=\frac{ra-pc}{qa-pb},\quad z'=x'a_0+y'b_0. \tag{27}$$

Обозначим

$$\begin{array}{c} A_1=p-pa_0^2+2ra_0,\quad A_2=q+rb_0-pa_0b_0,\quad A_3=-p-pb_0^2,\\ B_1=-q-qa_0^2,\quad B_2=p+ra_0-qa_0b_0,\quad B_3=-q-qb_0^2+2rb_0 \end{array} \tag{28}$$

и перепишем (25), (26) в виде

$$x''=x'^2A_1+2x'y'A_2+y'^2A_3, \tag{29}$$

$$y''=x'^2B_1+2x'y'B_2+y'^2B_3. \tag{30}$$

Сделаем в системе (29), (30) замену

$$x=\alpha u+\beta v,\quad y=\gamma u+\delta v, \tag{31}$$

где $\alpha=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$, $\beta=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$, $\gamma=-\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$, $\delta=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$.

Тогда получим

$$u''=u'^2\bar A_1+2u'v'\bar A_2+v'^2\bar A_3, \tag{32}$$

$$v''=u'^2\bar B_1+2u'v'\bar B_2+v'^2\bar B_3, \tag{33}$$

где $u'=\frac{x'q-py'}{\sqrt{p^2+q^2}}$, $v'=\frac{px'+qy'}{\sqrt{p^2+q^2}}$, $\Delta_0=\sqrt{p^2+q^2}$.

$$\begin{array}{ll} \Delta^3\bar A_1 & =\delta(\alpha^2A_1+2\alpha\gamma A_2+\gamma^2A_3)-\beta(\alpha^2B_1+2\alpha\gamma B_2+\gamma^2B_3),\\ \Delta^3\bar A_2 & =2[\delta(\alpha\beta A_1+(\alpha\delta+\beta\gamma)A_2+\gamma\delta A_3)\\ & \quad -\beta(\alpha\beta B_1+(\alpha\delta+\beta\gamma)B_2+\gamma\delta B_3)],\\ \Delta^3\bar B_1 & =\alpha(\alpha^2B_1+2\alpha\gamma B_2+\gamma^2B_3)-\gamma(\alpha^2A_1+2\alpha\gamma A_2+\gamma^2A_3),\\ \Delta^3\bar B_3 & =\alpha(\beta^2B_1+2\beta\delta B_2+\delta^2B_3)-\gamma(\beta^2A_1+2\beta\delta A_2+\delta^2A_3). \end{array} \tag{34}$$

Легко проверить, что $a_0p+b_0q=r$, $\bar{A}_3=0$, $\bar{B}_2=0$ и

$$a_0q-b_0p=\frac{c(p^2+q^2)-r(pa+qb)}{qa-pb}.$$

Подставляя в $\bar{A}_1,\ldots,\ \bar{B}_3$ их выражения через $A_1,\ldots\ B_3$ (из (28)), получим после упрощений

$$\begin{aligned}
\Delta^3\bar{A}_1 &= 2r(p^2+q^2)\frac{c(p^2+q^2)-r(pa+qb)}{qa-pb},\\
\Delta^3\bar{A}_2 &= 2(p^2+q^2)(p^2+q^2+r^2),\\
\Delta^3\bar{B}_1 &= -(p^2+q^2)^2-(p^2+q^2)(\frac{c(p^2+q^2)-r(pa+qb)}{qa-pb})^2,\\
\Delta^3\bar{B}_2 &= (p^2+q^2)(p^2+q^2+r^2).
\end{aligned} \tag{35}$$

Так как $\bar{A}_3=0$, $\bar{B}_2=0$, то систему (32)-(33) можно записать в виде

$$\begin{gathered}
u''=\bar{A}_1u'^2+2\bar{A}_2u'v',\\
v''=\bar{B}_1u'^2+\bar{B}_3v'^2.
\end{gathered} \tag{36}$$

Так как $u=\frac{xq-py}{\sqrt{p^2+q^2}}$, $v=\frac{xp+qy}{\sqrt{p^2+q^2}}$, то краевые условия примут вид:

$$u(0)=v(0)=0,\quad u(1)=\frac{aq-bp}{\sqrt{p^2+q^2}},\quad v(1)=\frac{ap+bq}{\sqrt{p^2+q^2}}. \tag{37}$$

Из (36) находим

$$u'=u'_0\exp(\bar{A}_1u+2\bar{A}_2v). \tag{38}$$

Из (38) следует, что $u(t)$ изменяется монотонно ($u'(t)\neq 0$), и поэтому в качестве независимой переменной вместо t можно взять u, так что $v=v(u')$. Тогда получим

$$\frac{dv}{du}=\frac{v'}{u'};\quad \frac{d^2v}{du^2}=\frac{1}{(u')^3}(v''u'-v'u'')$$

или

$$\frac{d^2v}{du^2}=[\bar{B}_1+\bar{B}_3(\frac{dv}{du})^2-\bar{A}_1\frac{dv}{du}-2\bar{A}_2(\frac{dv}{du})^2]$$

или

$$\frac{d^2v}{du^2}=-[-\bar{B}_1+\bar{A}_1\frac{dv}{du}+(\frac{dv}{du})^2(2\bar{A}_2-\bar{B}_3)]. \tag{39}$$

Подставляя в (39) вместо $\bar{A}_1,\ldots,\ \bar{B}_3$ их выражения из (35), получим

$$\begin{aligned}
\frac{d^2v}{du^2} &= -[(p^2+q^2)^2+(p^2+q^2)(\frac{c(p^2+q^2)-r(ap+bq)}{aq-bp})^2+\\
&+\frac{dv}{du}(\frac{2(p^2+q^2)}{aq-bp}(rc(p^2+q^2)-r^2(ap+bq)))+\\
&+(\frac{dv}{du})^2(p^2+q^2)(p^2+q^2+r^2)]\frac{1}{\Delta^3}.
\end{aligned} \tag{40}$$

Запишем уравнение (40) в виде

$$\frac{d^2v}{du^2} = -[(\sqrt{p_0}v' + \frac{1}{2\sqrt{p_0}}Q)^2 + \alpha^2], \tag{41}$$

где $p_0 = (p^2+q^2)(p^2+q^2+r^2)$,

$$Q = \frac{2(p^2+q^2)}{aq-bp}(rc(p^2+q^2) - r^2(ap+bq)),$$

$$\alpha^2 = R - \frac{1}{4p_0}Q^2,$$

$$R = (p^2+q^2)^2 + (p^2+q^2)(\frac{c(p^2+q^2)-r(ap+bq)}{aq-bp})^2.$$

Можно показать, что $\alpha > 0$. Интегрируя (41) от $u = 0$ до $u \geq 0$, получим

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{p_0}}[\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}(\sqrt{p_0}v' + \frac{1}{2\sqrt{p_0}}Q) - \operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}(\sqrt{p_0}v_0' + \frac{1}{2\sqrt{p_0}}Q)] = -\frac{u}{\Delta^3}.$$

Отсюда следует

$$\sqrt{p_0}v' + \frac{1}{2\sqrt{p_0}} = \frac{(\sqrt{p_0}v_0' + \frac{1}{2\sqrt{p_0}}Q)\alpha\cos(\alpha\sqrt{p_0}\frac{u}{\Delta^3}) - \alpha^2\sin(\alpha\sqrt{p_0}\frac{u}{\Delta^3})}{\alpha\cos(\alpha\sqrt{p_0}\frac{u}{\Delta^3}) + (\sqrt{p_0}v_0' + \frac{Q}{2\sqrt{p_0}})\sin(\alpha\sqrt{p_0}\frac{u}{\Delta^3})}.$$

Интегрируя последнее уравнение, найдем

$$\sqrt{p_0}v + \frac{u}{2\sqrt{p_0}}Q = \frac{\Delta^3}{\alpha\sqrt{p_0}}\ln\frac{1}{\alpha}[\alpha\cos(\alpha\sqrt{p_0}\frac{u}{\Delta^3}) + (\sqrt{p_0}v_0' + \frac{Q}{2\sqrt{p_0}})\sin(\alpha\sqrt{p_0}\frac{u}{\Delta^3})]. \tag{42}$$

Так как величины $u(1)$, $v(1)$ нам известны (см.(37)), то из (42) мы можем найти $v_0' = v'(0)$, но только если

$$\Delta^{-3}\alpha\sqrt{p_0}u(1) < \pi, \tag{43}$$

что мы и будем предполагать. Условие (43) – это условие разрешимости задачи (32)-(33), а также задач (26)-(27) и (8)-(10). Из (43), возводя обе части неравенства в квадрат и подставляя соответствующие значения, получим неравенство

$$\begin{gathered}
[(p^2+q^2)^2 + (p^2+q^2)(\frac{c(p^2+q^2)-r(ap+bq)}{aq-bp})^2 - \\
-\frac{4(p^2+q^2)^2r^2}{(aq-bp)^2}(c(p^2+q^2)-r(ap+bq))^2 \cdot \frac{1}{4(p^2+q^2)(p^2+q^2+r^2)}] \cdot \\
\cdot\frac{(p^2+q^2)(p^2+q^2+r^2)(aq-bp)^2}{(p^2+q^2)^4} < \pi^2.
\end{gathered} \tag{44}$$

После сокращений и упрощений из (44) получим неравенство

$$(qa-bp)^2 + (pc-ra)^2 + (qc-br)^2 < \pi^2. \tag{45}$$

Таким образом, задача (8)-(10) разрешима, если краевые значения a, b, c удовлетворяют неравенству (45).

Уравнение $(qa - bp)^2 + (pc - ra)^2 + (qc - br)^2 = \pi^2$ в трехмерном пространстве (a, b, c) есть уравнение кругового цилиндра, ось которого задается параметрическими уравнениями $x = ps$, $y = qs$, $z = rs$, а радиус равен $(p^2 + q^2 + r^2)^{-1/2}\pi$.

В самом начале наших рассуждений при получении равенства (27) (для исключения переменной z) мы предполагали, что $qa - pb \neq 0$. Если эта разность равна нулю, но $pc - ra$ или $qc - rb$ не равны нулю, то проводя аналогичные рассуждения, мы снова получим условие (45).

Список литературы

[1] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4. М.Л. 1951 г.

[2] Клоков Ю.А. Дифференц.уравнения. 2004, т.40, № 3. С.324-329.

[3] Клоков Ю.А. Дифференц.уравнения. 2007, т.43, № 4. С.443-448.

[4] Клоков Ю.А. Дифференц.уравнения. 2008, т.44, № 6. С.748-754.

Yu.A. Klokov. On extremals of a certain functional.

Summary. Extremals of the functional

$$I(l) = \int_0^1 (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} v^{-1}(x, y, z)dt$$

are studied, where $v > 0$, $\forall(x, y, z) \in R^3$, $v \in C^1(R^3)$, $x(t), y(t), z(t) \in C^2(I)$, $I = [0, 1]$.

MSC 34B15, 49

J.A. Klokovs. Par kāda funkcionāla ekstremālem.

Anotācija. Tiek pētītas funkcionāla ekstremāles

$$I(l) = \int_0^1 (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} v^{-1}(x, y, z)dt$$

kur $v > 0$, $\forall(x, y, z) \in R^3$, $v \in C^1(R^3)$, $x(t), y(t), z(t) \in C^2(I)$, $I = [0, 1]$.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 26.11.2008