Нелинейные краевые задачи для φ-Лапласиана

А.Я. Лепин

Аннотация. Для краевой задачи

$$(\varphi(t,x,x'))' = f(t,x,x^{'}), \quad H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2$$

доказывается теорема существования решения аналогичная соответствующей теореме для краевой задачи

$$x^{''} = f(t,x,x^{'}), \quad H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2.$$

Библиогр. 6 назв.

УДК 517.927

В работе [1] для краевой задачи

$$x^{''} = f(t,x,x^{'}), \quad t \in I = [a,b], \quad H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2, \quad \alpha \le x \le \beta, \tag{1}$$

при единственности решения задачи Коши и продолжимости решений получены разнообразные теоремы сущесвования решения краевой задачи (1). Наша цель для краевой задачи

$$(\varphi(t,x,x^{'}))^{'} = f(t,x,x^{'}), \quad t \in I, \quad H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2, \alpha \le x \le \beta \tag{2}$$

показать, что наиболее интересная теорема работы [1] справедлива для краевой задачи (2).

Основные предположения.

Функция $\varphi \in C(I \times R^2, R)$ строго возрастает по последнему аргументу, функция $f : I \times R^2 \to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори: $f(t,x,y)$ измернма на I при фиксированных $x, y \in R$, $f(t, ., .)$ непрервна на R^2 при $t \in I$ и для любого компактного множества $P \subset R^2$ найдется функция $g \in L_1(I, R)$ такая,что для всех $(t, x, y) \in I \times P$ справедливо неравенство $|f(t, x, y)| \leq g(t)$, функционалы $H_1, H_2 : C^1(I, R) \to R$ непрерывны в норме $C^1, h_1, h_2 \in R, \alpha \in Lip(I, R)$ - нижняя функция: для любых $t_1 \in (a, b)$ и $t_2 \in (t_1, b)$ из существования производных $\alpha^{'}(t_1)$ и $\alpha^{'}(t_2)$ следует неравенство

$$\varphi(t_2, \alpha(t_2), \alpha^{'}(t_2)) - \varphi(t_1, \alpha(t_1), \alpha^{'}(t_1)) \geq \int_{t_1}^{t_2} f(s, \alpha(s), \alpha^{'}(s))ds,$$

$\beta \in Lip(I, R)$ - верхняя функция: для любых $t_1 \in (a, b)$ и $t_2 \in (t_1, b)$ из существования производных $\beta^{'}(t_1)$ и $\beta^{'}(t_2)$ следует неравенство

$$\varphi(t_2, \beta(t_2), \beta^{'}(t_2)) - \varphi(t_1, \beta(t_1), \beta^{'}(t_1)) \leq \int_{t_1}^{t_2} f(s, \beta(s), \beta^{'}(s))ds.$$

Заметим, что для так определенных нижних и верхних функций существуют $\alpha^{'}(a)$, $\alpha^{'}(b)$, $\beta^{'}(a)$ и $\beta^{'}(b)$.

Определение 1. Функция $x \in C^1(I, R)$ является решением уравнения

$$(\varphi(t, x, x^{'}))^{'} = f(t, x, x^{'}), \tag{3}$$

если $\varphi(t, x, x^{'})$ абсолютно непрерывная функция и уравнение (3) удовлетворяется почти всюду на I.

Далее будем предполагать, что $\alpha < \beta$, решение задачи Коши

$$(\varphi(t, x, x^{'}))^{'} = f(t, x, x^{'}), \quad x(\tau) = x_0, \quad x^{'}(\tau) = x_1 \tag{4}$$

единственно для любых $\tau \in I, x_0, x_1 \in R$ и продолжимо на I. Заметим, что из этих условий следует разрешимость задачи Дирихле между нижней и верхней функциями: для любых нижней функции α_1 и верхней функции β_1 из $A \in [\alpha_1(a), \beta_1(a)]$, $B \in [\alpha_1(b), \beta_1(b)]$ и $\alpha_1 \leq \beta_1$ следует существование минимального и максимального решений задачи Дирихле

$$(\varphi(t, x, x^{'}))^{'} = f(t, x, x^{'}), \quad x(a) = A, x(b) = B, \quad \alpha_1 \leq x \leq \beta_1.$$

Множество всех решений x: $I \to R$ уравнения (3) обозначим через $S(I, R)$, а множество решений, лежащих между α и β, обозначим через S. Решение задачи Коши (4) обозначим через $s(\tau, x_0, x_1)$.

Вложение окружности в множество решений.

Для окружности $L = \{(\cos\gamma, \sin\gamma) : \gamma \in [0, 2\pi]\}$ строится вложение $F : L \to S$, которое является основой для доказательства теоремы о разрешимости краевой задачи (2). Гомеоморфизм $G : S(I, R) \to R^2$ определим формулой $x \to (x(a), x^{'}(a)), x_\gamma = F((\cos\gamma, \sin\gamma)), \gamma \in [0, 2\pi]$, максимальное решение задачи Дирихле

$$(\varphi(t, x, x^{'}))^{'} = f(t, x, x^{'}), \quad x(a) = \alpha(a), x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta \tag{5}$$

обозначим через y, а минимальное решение задачи Дирихле

$$(\varphi(t,x,x^{'}))^{'} = f(t,x,x^{'}), \quad x(a) = \beta(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad y \leq x \leq \beta$$

обозначим через z.

Лемма 1. Существует инъективное непрерывное отображение $F : L \to S$, удовлетворяющее следующим условиям: $x_0 = y, x_\pi = z$, найдутся $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,\pi)$ такие, что $\gamma_1 \leq \gamma_2$ и

$$(\forall \gamma \in (0,\gamma_1))(x_\gamma(a) = y(a)), \tag{6}$$

$$x_{\gamma_1}(a) = y(a) \wedge x_{\gamma_1}(b) = z(b), \tag{7}$$

$$(\forall \gamma \in (\gamma_1,\gamma_2))(x_\gamma(a) = y(a) \vee x_\gamma(b) = z(b)), \tag{8}$$

$$x_{\gamma_2}(a) = y(a) \wedge x_{\gamma_2}(b) = z(b), \tag{9}$$

$$(\forall \gamma \in (\gamma_2,\pi))(x_\gamma(b) = z(b)), \tag{10}$$

найдутся $\gamma_3, \gamma_4 \in (\pi, 2\pi)$ такие, что $\gamma_3 \leq \gamma_4$ и

$$(\forall \gamma \in (\pi,\gamma_3))(x_\gamma(a) = z(a)), \tag{11}$$

$$x_{\gamma_3}(a) = z(a) \wedge x_{\gamma_3}(b) = y(b), \tag{12}$$

$$(\forall \gamma \in (\gamma_3,\gamma_4))(x_\gamma(a) = z(a) \vee x_\gamma(b) = y(b)), \tag{13}$$

$$x_{\gamma_4}(a) = z(a) \wedge x_{\gamma_4}(b) = y(b), \tag{14}$$

$$(\forall \gamma \in (\gamma_4,2\pi))(x_\gamma(b) = y(b)). \tag{15}$$

Если $K \subset R^2$ лежит внутри простой замкнутой кривой $L_1 = GF(L)$, то $G^{-1}(K) \subset S$.

Доказательство. Пусть y_1 - минимальное, а z_1 - максимальное решение задачи Дирихле

$$(\varphi(t,x,x^{'}))^{'} = f(t,x,x^{'}), \quad x(a) = y(a), \quad x(b) = z(b), \quad y \leq x \leq z.$$

Из единственности решения задачи Коши следует, $y^{'}(a) < y_1^{'}(a)$ и $z_1^{'}(b) > z^{'}(b)$.

Рассмотрим случай, когда $y_1 = z_1$. Тогда $\gamma_1 = \gamma_2 = \pi/2$ и

$$\begin{gathered} x_\gamma = s(a, y(a), y^{'}(a) + \gamma\gamma_1^{-1}(y_1^{'}(a) - y^{'}(a))), \quad \gamma \in [0,\gamma_1], \\ x_\gamma = s(b, z(b), z_1^{'}(b) + (\gamma - \gamma_2)(\pi - \gamma_2)^{-1}(z^{'}(b) - z_1^{'}(b))), \\ \gamma \in [\gamma_2, \pi]. \end{gathered} \tag{16}$$

Покажем, что x_γ удовлетворяет неравенствам

$$y(t) < x_\gamma(t) < y_1(t), t \in (a,b], \gamma \in (0,\gamma_1), \tag{17}$$

$$z_1(t) < x_\gamma(t) < z(t), t \in [a,b), \gamma \in (\gamma_2,\pi). \tag{18}$$

Действительно, для $\gamma \in (0,\gamma_1)$ близких к 0 решение x_γ или пересекает y или удовлетворяет неравенству (17). Пусть $c \in (a,b]$ такое, что $x_\gamma(c) = y(c)$ и $x_\gamma(t) > y(t), t \in (0,c)$. Тогда $\alpha_1(t) = x_\gamma(t), t \in [a,c]$ и $\alpha_1(t) = y(t), t \in [c,b]$ является нижней функцией. Из разрешимости задачи Дирихле

$$(\varphi(t,x,x^{'}))^{'} = f(t,x,x^{'}), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha_1 \leq x \leq \beta.$$

получаем противоречие с тем, что y максимальное решение задачи Дирихле (5). Из непрерывности заключаем о существовании x_γ для интервала $(0,\gamma_1)$, так как иметь общие точки с y_1 на интервале (a,b) x_γ не может по аналогичным соображениям. Неравенство (18) доказывается аналогично.

Рассмотрим случай, когда $y_1(t) < z_1(t), \quad t \in (a,b)$. Тогда $\gamma_1 = \pi/3$ и $\gamma_2 = 2\pi/3$. Аналогично предыдущему формулы (16) дают отображения для соответствующих интервалов. Нужно еще построить отображение для интервала $[\gamma_1,\gamma_2]$. Для этого придется подробно исследовать поведение решений. Пусть

$$X = \{x \in S(I,R) : x(a) = y(a) \wedge x(b) = z(b) \wedge y \leq x \leq z\},$$
$$X_* = \{x_* \in X : (\forall x \in X)(x^{'}(a) \leq x_*^{'}(a) \vee x^{'}(b) \leq x_*^{'}(b))\}.$$

Заметим, что $y_1, z_1 \in X_*$ и X_* замкнуто. Покажем, что

$$\{(\forall x_* \in X_*)(\forall x \in X)(x^{'}(a) < x_*^{'}(a) \wedge x^{'}(b) > x_*^{'}(b) \Rightarrow x \leq x_*\}. \tag{19}$$

Предположим противное

$$(\exists x_* \in X_*)(\exists x \in X)(x^{'}(a) < x_*^{'}(a) \wedge x^{'}(b) > x_*^{'}(b) \wedge (\exists t_0 \in I)(x(t_0) > x_*(t_0))).$$

Ясно, что для достаточно малого $\delta > 0$ количество общих точек у $s(a,y(a),x_*^{'}(a) + \delta)$ и x на интервале (a,b) не менее двух. Пусть $x_1 = \max\{x,x_*\}$, а x_2 - минимальное решение краевой задачи

$$(\varphi(t,x,x^{'}))^{'} = f(t,x,x^{'}), \quad x(a) = y(a), \quad x(b) = z(b), \quad x_1 \leq x \leq z.$$

Из единственности решения задачи Коши следует неравенство $x_1(t) < x_2(t), t \in (a,b)$. Докажем, что для достаточно малого $\delta > 0$ из минимальности x_2 следует $s(a,y(a),x_2{'}(a) - \delta,t) < x_2(t), t \in (a,b]$. В противном случае найдутся δ и $c \in (a,b]$ такие, что

$$s(a,y(a),x_2^{'}(a) - \delta, c) = x_2(c), x_1(t) < s(a,y(a),x_2^{'}(a) - \delta, t) < x_2(t), \quad t \in (a,c).$$

Аналогично предыдущему из разрешимости соответствующей краевой задачи Дирихле получаем противоречие с минимальностью x_2. Пусть

$$\mu_* = \inf\{\mu_0 \in (x_*^{'}(a), x_2^{'}(a)) : (\forall \mu \in (\mu_0, x_2^{'}(a)))$$

$$(\forall t \in (a,b])(s(a,y(a),\mu,t) < x_2(t))\}.$$

Тогда для любого $\mu \in (\mu_*, x_2^{'}(a))$ количество общих точек у $s(a,y(a),\mu)$ и x, x_* на интерале (a,b) равно 1. Следовательно, $x_*^{'}(a) < \mu_*$. Из единственности решения задачи Коши следует $s(a,y(a),\mu_*,t) < x_2(t), t \in (a,b)$. Если $s(a,y(a),\mu_*,b) < z(b)$, то для достаточно малого $\delta > 0$ и $\mu \in (\mu_* - \delta, \mu_*)$ справедливо неравенство $s(a,y(a),\mu,t) < x_2(t), t \in (a,b]$, что противоречит определению μ_*. Следовательно, $s(a,y(a),\mu_*,b) = z(b)$. Из $\mu_* > x_*^{'}(a), x_* \in X_*$ и единственности решения задачи Коши следует неравенство $s^{'}(a,y(a),\mu_*,b) < x_*^{'}(b)$. Следовательно, $s(a,y(a),\mu_*) \geq x_1$, что противоречит минимальности x_2. Условие (19) доказано.

Если $x_{*1}, x_{*2} \in X_*$ и $x'_{*1}(a) < x'_{*2}(a)$, то

$$x_{*1}(t) < x_{*2}(t), \quad t \in (a,b). \tag{20}$$

Из $x_{*2}^{'}(a) > x_{*1}^{'}(a), x_{*1} \in X_*$ и единственности решения задачи Коши следует $x_{*2}^{'}(b) < x_{*1}^{'}(b)$. Применяя (19) при $x_1 = x_{*2}$ и $x = x_{*1}$ имеем $x_{*1} \leq x_{*2}$. Из единственности решения задачи Коши следует (20). Условие (20) свидетельствует о линейной упорядоченности множества X_*.

Рассмотрим случай, когда $x_{*1}, x_{*2} \in X_*$, и для любого $x_* \in X_*$ из $x_{*1} \leq x_* \leq x_{*2}$ следует $x_* = x_{*1}$ или $x_* = x_{*2}$. Пусть $\mu_1 = x'_{*1}(a), \mu_2 = x'_{*2}(a), \nu_1 = x_{*1}^{'}(b)$ и $\nu_2 = x_{*2}^{'}(b)$. Тогда

$$(\exists \mu \in (\mu_1,\mu_2))(s(a,y(a),\mu) \leq x_{*2}) \vee (\exists \nu \in (\nu_2,\nu_1))(s(b,z(b),\nu) \geq x_{*1}). \tag{21}$$

Предположим противное. Тогда найдутся $\mu_* \in (\mu_1,\mu_2), \nu_* \in (\nu_2,\nu_1), c \in (a,b]$ и $d \in [a,b)$ такие, что

$$s(a,y(a),\mu_*,c) = x_{*2}(c), \quad s(a,y(a),\mu_*,t) < x_{*2}(t), \quad t \in (a,c),$$

$$s(b,z(b),\nu_*,d) = x_{*1}(d), \quad s(b,z(b),\nu_*,t) > x_{*1}(t), \quad t \in (d,b),$$

и для $\alpha_1(t) = x_{*1}(t), \quad t \in [a,d], \quad \alpha_1(t) = s(b,z(b),\nu_*,t), t \in [d,b], \quad \beta_1(t) = s(a,y(a),\mu_*,t), t \in [a,c], \quad \beta_1(t) = x_{*2}(t), t \in [c,b]$ справедливо неравенство $\alpha_1 \leq \beta_1$. Задача Дирихле

$$(\varphi(t,x,x^{'}))^{'} = f(t,x,x^{'}), \quad x(a) = y(a), \quad x(b) = z(b), \quad \alpha_1 \leq x \leq \beta_1$$

имеет решение x_0. Из единственности решения задачи Коши следует

$$x_{*1}^{'}(a) < x_0{'}(a) < x_{*2}{'}(a), \quad x_{*1}{'}(b) > x_0{'}(b) > x_{*2}{'}(b), \quad x_0 \in X. \tag{22}$$

Покажем, что условия (22) приводят к прtиворечию. Из компактности множества

$$M = \{x \in X : x^{'}(a) \geq x_0^{'}(a) \wedge x^{'}(b) \geq x_0^{'}(b)\}$$

следует существование $x_3 \in M$ такого,что $x_3^{'}(a) \geq x^{'}(a)$ для любого $x \in M$. Из $x_{*2} \in X_*$ и единственности решения задачи Коши следует $x_3^{'}(a) < x_{*2}^{'}(a)$, а из неравенства $x_{*1}^{'}(a) < x_3^{'}(a) < x_{*2}^{'}(a)$ следует, что x_3 не принадлежит X_*. Следовательно, найдется $x_4 \in X$, для которого $x_4^{'}(a) > x_3^{'}(a)$ и $x_4^{'}(b) > x_3^{'}(b)$, что противоречит определению x_3. Условие (21) доказано. Покажем, что

$$\begin{gathered}(\exists \mu_0 \in (\mu_1,\mu_2))(s(a,y(a),\mu_0) \leq x_{*2}) \Rightarrow \\ (\forall \mu \in (\mu_1,\mu_2))(\forall t \in (a,b])(s(a,y(a),\mu,t) < x_{*2}(t)).\end{gathered} \tag{23}$$

Из единственности решения задачи Коши следует $s(a, y(a), \mu_0, t) < x_{*2}(t)$, $t \in (a, b)$. Если $s(a, y(a), \mu_0, b) = z(b)$, то $s(a, y(a), \mu_0) \in X$ и $s^{'}(a, y(a), \mu_0, b) \geq x^{'}_{*2}(b)$. Из единственности решения задачи Коши следует $s^{'}(a, y(a), \mu_0, b) \neq x^{'}_{*1}(b)$ и $s^{'}(a, y(a), \mu_0, b) \neq x^{'}_{*2}(b)$, а из противоречивости (22) для $x_0 = s(a, y(a), \mu_0)$ следует $s'(a, y(a), \mu_0, b) > x^{'}_{*1}(b)$, что противоречит условию $x^{'}_{*1} \in X_*$. Следовательно, $s(a, y(a), \mu_0, b) < z(b)$. Пусть

$$\mu_3 = \inf\{\mu_* \in (\mu_1, \mu_0) : (\forall \mu \in (\mu_*, \mu_0))(\forall t \in (a, b])(s(a, y(a), \mu, t) < x_{*2}(t))\},$$

$$\mu_4 = \sup\{\mu_* \in (\mu_0, \mu_2) : (\forall \mu \in (\mu_0, \mu_*))(\forall t \in (a, b])(s(a, y(a), \mu, t) < x_{*2}(t))\}.$$

Если $\mu_3 = \mu_1$ и $\mu_4 = \mu_2$, то (23)очевидно. Если $\mu_3 > \mu_1$, то пусть $\mu_5 = \mu_3$, а если $\mu_3 = \mu_1$ и $\mu_4 < \mu_2$, то пусть $\mu_5 = \mu_4$. Тогда $\mu_5 \in (\mu_1, \mu_2)$ и $s(a, y(a), \mu_5) < x_{*2}$. Если $s(a, y(a), \mu_5, b) = z(b)$, то аналогично предыдущему получаем противоречие. Если $s(a, y(a), \mu_5, b) < z(b)$, то $s(a, y(a), \mu_5, t) < x_{*2}(t), t \in (a, b]$, что приводит к противоречию с определением μ_5. Условие (23) доказано. Аналогично доказывается, что

$$(\exists \nu_0 \in (\nu_2, \nu_1))(s(b, z(b), \nu_0) \geq x_{*1}) \Rightarrow$$
$$(\forall \nu \in (\nu_2, \nu_1))(\forall t \in [a, b))(s(b, z(b), \nu, t) < x_{*1}(t)).$$

Заметим, что условие

$$(\exists \mu_0 \in (\mu_1, \mu_2))(s(a, y(a), \mu_0) \leq x_{*2}) \wedge (\exists \nu_0 \in (\nu_2, \nu_1))(s(b, z(b), \nu_0) \geq x_{*1})$$

аналогично предыдущему приводит к противоречию.

Перейдем к определению x_γ для $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$. Пусть

$$\begin{gathered} x_\gamma = s(a, y(a), y_1^{'}(a) + (\gamma - \gamma_1)(\gamma_2 - \gamma_1)^{-1}(z_1^{'}(a) - y_1^{'}(a))), \\ \Gamma = \{\gamma \in \{[\gamma_1, \gamma_2]\} : x_\gamma \in X_*\}. \end{gathered} \tag{24}$$

Тогда x_γ определяется формулой (24) для $\gamma \in \Gamma$. Из предыдущего следует, что Γ - замкнутое множество, $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ и $[\gamma_1, \gamma_2] \backslash \Gamma$ -открытое множество. Пусть $\gamma_5, \gamma_6 \in \Gamma, \gamma_5 < \gamma_6$ и $(\gamma_5, \gamma_6) \cap \Gamma = \oslash$. Если $x_\gamma \leq x_{\gamma 6}$ для $\gamma \in (\gamma_5, \gamma_6)$, то x_γ определяется формулой (24) для $\gamma \in (\gamma_5, \gamma_6)$. В противном случае

$$x_\gamma = s(b, z(b), x_{\gamma 5}^{'}(b) + (\gamma - \gamma_5)(\gamma_6 - \gamma_5)^{-1}(x_{\gamma 6}^{'}(b) - x_{\gamma 5}^{'}(b))), \gamma \in (\gamma_5, \gamma_6).$$

Так определенное отображение x_γ инъективно, непрерывно и удовлетворяет условию (8).

Используя минимальное и максимальное решения задачи Дирихле

$$(\varphi(t, x, x^{'}))' = f(t, x, x^{'}), \quad x(a) = z(a), \quad x(b) = y(b), \quad y \leq x \leq z,$$

аналогично предыдущему строим x_γ для $\gamma \in [\pi, 2\pi]$.

Докажем включение $G^{-1}(k) \subset S$. Предположим противное. Тогда найдется $k \in K$ такое, что $x_* = G^{-1}(K) \subset S(I, R) \backslash S$. Рассмотрим случай, когда найдется $t_0 \in I$ такое, что $x_*(t_0) > z(t_0)$. Множество

$$M = \{G(x) : x \in S(I, R) \wedge x(t_0) \geq x_*(t_0)\}$$

неограничено и связно. Следовательно, $L_1 \cap M \neq \oslash$. Пусть $k_1 \in L_1 \cap M$. Тогда для $x_1 = G^{-1}(k_1)$ имеем $x_1(t_0) \geq x_*(t_0) > z(t_0)$, что невозможно. Случай, когда найдется $t_0 \in I$ такое, что $x_*(t_0) < y(t_0)$ рассматривается аналогично.

Основной результат

Теорема 1 *Пусть для любого $x \in S$ следует справедливость одной из групп условий*

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x + H_2x \leq h_1 + h_2, \tag{25}$$

$$(x(a) = \alpha(a) \vee x(b) = \beta(b)) \wedge H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \leq h_1, \tag{26}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x + H_2x \geq h_1 + h_2, \tag{27}$$

$$(x(a) = \beta(a) \vee x(b) = \alpha(b)) \wedge H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \geq h_1; \tag{28}$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x \leq h_1 \vee H_2x \leq h_2, \tag{29}$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge H_2x = h_2 \Rightarrow H_1x \leq h_1, \tag{30}$$

$$(x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x \leq h_1 \vee H_2x \geq h_2, \tag{31}$$

$$x(b) = \beta(b) \wedge H_1x = h_1 \Rightarrow H_2x \geq h_2, \tag{32}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x \geq h_1 \vee H_2x \geq h_2, \tag{33}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge H_2x = h_2 \Rightarrow H_1x \geq h_1, \tag{34}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x \geq h_1 \vee H_2x \leq h_2, \tag{35}$$

$$x(b) = \alpha(b) \wedge H_1x = h_1 \Rightarrow H_2x \leq h_2; \tag{36}$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x + H_2x \leq h_1 + h_2 \vee H_1x - H_2x \geq h_1 - h_2, \tag{37}$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge H_1x - H_2x = h_1 - h_2 \Rightarrow H_1x \leq h_1, \tag{38}$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x + H_2x \leq h_1 + h_2 \vee H_1x - H_2x \leq h_1 - h_2, \tag{39}$$

$$x(b) = \beta(b) \wedge H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \leq h_1, \tag{40}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x + H_2x \geq h_1 + h_2 \vee H_1x - H_2x \leq h_1 - h_2, \tag{41}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge H_1x - H_2x = h_1 - h_2 \Rightarrow H_1x \geq h_1, \tag{42}$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x + H_2x \geq h_1 + h_2 \vee H_1x - H_2x \geq h_1 - h_2, \tag{43}$$

$$x(b) = \alpha(b) \wedge H_1x + H_2x = h_1 + h_2 \Rightarrow H_1x \geq h_1. \tag{44}$$

Тогда существует решение краевой задачи (2) .

Доказательство. Пусть y - максимальное решение задачи Дирихле

$$(\varphi(t,x,x^{'}))^{'} = f(t,x,x^{'}), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

а z - минимальное решение задачи Дирихле

$$(\varphi(t,x,x^{'}))^{'} = f(t,x,x^{'}), \quad x(a) = \beta(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad y \leq x \leq \beta.$$

По лемме 1 существует отображение $F : L \Rightarrow S$. Если в некоторой точке $L_1 = GF(L)$ векторное поле

$$Hr = (H_1G^{-1}(r) - h_1, H_2G^{-1}(r) - h_2)$$

обращается в нуль, то теорема доказана. Пусть векторное поле H на L_1 не обращается в нуль. Покажем, что вращение векторного поля H на L_1 отлично от нуля, что завершит доказательство теоремы.

Рассмотрим случай, когда справедливы условия (25) - (28). Из (25), (26) и (28) следует, что Hx_0 лежит ниже биссектрисы второго и четвертого квадрантов, а из (26) и условий (6) - (10) следует, что Hx_γ при $\gamma \in (0,\pi)$ не сонаправлен с (1,-1), из (26), (27) и (28) следует, что Hx_π лежит выше биссектрисы второго и четвертого квадрантов, из (28) и условий (11) - (15) следует, что Hx_γ при $\gamma \in (\pi, 2\pi)$ не сонаправлен с (-1,1). Отсюда следует отличие от нуля вращения векторного поля.

Рассмотрим случай, когда справедливыи условия ((29) - (36). Из (29), (30) и (36) следует, что Hx_0 не лежит в первом квадранте, из условия (30) и условия (6) следует, что Hx_γ при $\gamma \in (0,\gamma_1)$ не сонаправлен с (1,0), а из (30), (31) и (32) и условий (7), (9) следует, что $Hx_{\gamma 1}$ и $Hx_{\gamma 2}$ не лежат в четвертом квадранте, а из условия (8) следует, что при изменении γ от γ_1 до γ_2 Hx_γ не делает ни одного полного оборота, из (32) и условия (10) следует, что Hx_γ при $\gamma \in (\gamma_2, \pi)$ не сонаправлен с (0,-1), из (32), (33) и (34) следует, что Hx_π не лежит в третьем квадранте, из (34) и условия (11) следует, что Hx_γ при $\gamma \in (\pi, \gamma_3)$ не сонаправлен с (-1,0), из (34), (35), (36) и условий (12), (14) следует, что $Hx_{\gamma 3}$ и $Hx_{\gamma 4}$ не лежат во втором квадранте, а из условия (13) следует, что при изменении γ от γ_3 до γ_4 Hx_γ не делает ни одного полного оборота, из (36) и условия(15) следует, что Hx_γ при $\gamma \in (\gamma_4, 2\pi)$ не сонаправлен с (0,1). Отсюда следует отличие от нуля вращения векторного поля.

Случай, когда справедливы условия (37) - (44) рассматривается аналогично. При этом геометрически условия отличия от нуля вращения векторного поля отличаются от случая, когда справедливы условия (29) - (36), поворотом на $\pi/4$.

Покажем, как из теоремы 1 можно получить обобщение известных теорем. В работе [3] для краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \quad H_1(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = 0,$$

$$H_2(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = 0$$

доказана теорема существования решения при следующих условиях на H_1 и H_2. Функция H_1 не возрастает по второтму и третьему аргументам, функция H_2 не возрастает по первому аргументу и не убывает по четвертомуму аргументу и

$$H_1(\alpha(a), \alpha(b), \alpha'(a), v) \leq 0 \leq H_1(\beta(a), \beta(b), \beta'(a), v), \quad v \in R,$$

$$H_2(\alpha(a),\alpha(b),u,\alpha'(b))\leq 0\leq H_2(\beta(a),\beta(b),u,\beta'(b)),\quad u\in R.$$

Проверим справедливость условий (25) - (28).

$$x(a)=\alpha(a)\wedge x(b)=\alpha(b)\Rightarrow H_1x\leq H_1(\alpha(a),\alpha(b),\alpha'(a),x'(b))\leq 0\wedge$$

$$H_2x\leq H_2(\alpha(a),\alpha(b),x'(a),\alpha'(b))\leq 0\Rightarrow H_1x+H_2x\leq 0,$$

$$x(a)=\alpha(a)\Rightarrow H_1(x)\leq H_1(\alpha(a),\alpha(b),\alpha'(a),x'(b))\leq 0,$$

$$x(a)=\beta(a)\wedge x(b)=\beta(b)\Rightarrow H_1x\geq H_1(\beta(a),\beta(b),\beta'(a),x'(b))\geq 0$$

$$\wedge H_2x\geq H_2(\beta(a),\beta(b),x'(a),\beta'(b))\geq 0\Rightarrow H_1x+H_2x\geq 0,$$

$$x(a)=\beta(a)\Rightarrow H_1x\geq H_1(\beta(a),\beta(b),\beta'(a),x'(b))\geq 0.$$

Покажем, что теорему эквивалентную теореме Tb50 работы [2] можно получить из теоремы 1. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered}(\varphi(t,x,x^{'}))^{'}=f(t,x,x^{'}),\quad H_1(x(a),x(b),x'(a),x'(b))=h_1,\\ H_2(x(a),x(b),x'(a),x'(b))=h_2,\quad \alpha\leq x\leq\beta.\end{gathered}\tag{45}$$

Если H_1 не убывает по первому аргументу и не возрастает по остальным аргументам, H_2 не возрастает по третьему аргументу и не убывает по остальным аргументам, то из $\alpha^{'}(a)\geq\beta^{'}(a),\quad \alpha^{'}(b)\leq\beta^{'}(b),\quad H_1\alpha=H_1\beta=h_1,\quad H_2\alpha=H_2\beta=h_2$ следует существование решения краевой задачи (44). Проверим справедливость условий (37) - (44).

$$x(a)=\alpha(a)\wedge x(b)=\alpha(b)\Rightarrow H_2x\leq H_2\alpha=h_2$$

$$\Rightarrow H_1x+H_2x\leq h_1+h_2\vee H_1x-H_2x\geq h_1-h_2,$$

$$x(a)=\alpha(a)\wedge x^{'}(b)\geq\alpha^{'}(b)\Rightarrow H_1x\leq H_1\alpha=h_1,$$

$$x(a)=\alpha(a)\wedge x^{'}(b)<\alpha^{'}(b)\Rightarrow H_2x\leq H_2\beta=h_2,$$

$$x(a)=\alpha(a)\wedge x(b)=\beta(b)\Rightarrow H_1x\leq H_1\alpha=h_1$$

$$\Rightarrow H_1x+H_2x\leq h_1+h_2\vee H_1x-H_2x\leq h_1-h_2,$$

$$x(b)=\beta(b)\wedge x^{'}(a)\geq\beta^{'}(a)\Rightarrow H_1x\leq H_1\beta=h_1,$$

$$x(b)=\beta(b)\wedge x^{'}(a)<\beta^{'}(a)\Rightarrow H_2x\geq H_2\alpha=h_2,$$

$$x(a)=\beta(a)\wedge x(b)=\beta(b)\Rightarrow H_2x\geq H_2\beta=h_2$$

$$\Rightarrow H_1x+H_2x\geq h_1+h_2\vee H_1x-H_2x\leq h_1-h_2,$$

$$x(a)=\beta(a)\wedge x^{'}(b)\leq\beta^{'}(b)\Rightarrow H_1x\geq H_1\beta=h_1,$$

$$x(a)=\beta(a)\wedge x^{'}(b)>\beta^{'}(b)\Rightarrow H_2x\geq H_2\alpha=h_2,$$

$$x(a)=\beta(a)\wedge x(b)=\alpha(b)\Rightarrow H_1x\geq H_1\beta=h_1$$

$$\Rightarrow H_1x+H_2x\geq h_1+h_2\vee H_1x-H_2x\geq h_1-h_2,$$

$$x(b)=\alpha(b)\wedge x^{'}(a)\leq\alpha^{'}(a)\Rightarrow H_1x\geq H_1\alpha=h_1,$$

$$x(b)=\alpha(b)\wedge x^{'}(a)>\alpha^{'}(a)\Rightarrow H_2x\leq H_2\beta=h_2.$$

В работе [4] рассматривается краевая задача

$$x'' = f(t, x, x^{'}), \quad H_1(x(a), x'(a)) = 0, \quad H_2(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = 0$$

и доказаны теоремы существования решения при следующих условиях на H_1 и H_2. Функция H_1 не возрастает по второму аргументу, функция H_2 не убывает по четвертому аргументу, $H_1(\alpha(a), \alpha'(a)) \le 0 \le H_1(\beta(a), \beta'(a))$, для любых $x_0 \in [\alpha(a), \beta(a)], \quad x_1 \in R$ из $H_1(x_0, x_1) = 0$ следует

$$H_2(x_0, \alpha(b), x_1, \alpha'(b)) \le 0 \le H_2(x_0, \beta(b), x_1, \beta'(b)).$$

Покажем, что обобщение этого результата следует из теоремы 1. Проверим справедливость условий (29) - (36).

$$x(a) = \alpha(a) \Rightarrow H_1 x \le H_1 \alpha \le 0,$$
$$x(b) = \beta(b) \wedge H_1 x = 0 \Rightarrow H_2 x \ge H_2(x(a), \beta(b), x'(a), \beta'(b)) \ge 0,$$
$$x(a) = \beta(a) \Rightarrow H_1 x \ge H_1 \beta \ge 0,$$
$$x(b) = \alpha(b) \wedge H_1 x = 0 \Rightarrow H_2 x \le H_2(x(a), \alpha(b), x'(a), \alpha'(b)) \le 0.$$

В работе [5] рассматривается краевая задача

$$-(\varphi(x'))' = q(x') f(t, x, x'), \quad L_1(x(a), x(b), x'(a), x'(b), x) = 0,$$

$$L_2(x(a), x(b)) = 0$$

и доказывается теорема существования решения при следующих условиях на L_1 и L_2. Функция L_1 не убывает по третьему и пятому аргументам, не возрастает по четвертому аргументу, функция L_2 не возрастает по первому аргументу, $L_2(\alpha(a), .), L_2(\beta(a), .)$ инъективны,

$$L_1(\alpha(a), \alpha(b), \alpha'(a), \alpha'(b), \alpha) \ge 0, \quad L_1(\beta(a), \beta(b), \beta'(a), \beta'(b), \beta) \le 0$$

и $L_2(\alpha(a), \alpha(b)) = L_2(\beta(a), \beta(b)) = 0$. Покажем как аналогичный результат следует из теоремы 1. Проверим справедливость условий (25) - (28). Пусть $H_1 x = -L_2(x(a), x(b))$ и $H_1 x = -L_1(x(a), x(b), x'(a), x'(b), x)$. Тогда

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1 x + H_2 x =$$

$$-L_2(\alpha(a), \alpha(b)) - L_1(\alpha(a), \alpha(b), x'(a), x'(b), x) \le$$

$$-L_1(\alpha(a), \alpha(b), \alpha'(a), \alpha'(b), \alpha) \le 0,$$

$$x(a) = \alpha(a) \Rightarrow H_1 x = -L_2(\alpha(a), x(b)) \le 0,$$

$$x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1 x = -L_2(x(a), \beta(b)) \le 0,$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1 x + H_2 x =$$

$$-L_2(\beta(a), \beta(b)) - L_1(\beta(a), \beta(b), x'(a), x'(b), x) \ge$$

$$-L_1(\beta(a), \beta(b), \beta'(a), \beta'(b), \beta) \ge 0,$$

$$x(a) = \beta(a) \Rightarrow H_1 x = -L_2(\beta(a), x(b)) \ge 0,$$

$$x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x = -L_2(x(a), \alpha(b)) \geq 0.$$

В работе [6] рассматривается краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad h(x(a)) + x(b) = 0, \quad g(x(a), x'(a), x'(b)) = 0$$

и доказываются теоремы существования решения при следующих условиях на h и g. Функция h монотонна, функция g не убывает по второму аргументу, функции $g(\alpha(a), \alpha'(a), .), \quad g(\beta(a), \beta'(a), .)$ монотонны по третьему аргументу, причем монотонность совпадает с монотонностью для h,

$$\alpha(b) + \max\{h(\beta(a)), h(\alpha(a))\} = 0, \quad \beta(b) + \min\{h(\alpha(a)), h(\beta(a))\} = 0,$$

$$\min\{g(\alpha(a), \alpha'(a), \alpha'(b)), g(\alpha(a), \alpha'(a), \beta'(b))\} \geq 0,$$

$$\max\{g(\beta(a), \beta'(a), \beta'(b)), g(\beta(a), \beta'(a), \alpha'(b))\} \leq 0.$$

Покажем, что этот результат следует из теоремы 1. Пусть функция h не возрастает. Тогда

$$h(\alpha(a)) + \alpha(b) = 0, \quad h(\beta(a)) + \beta(b) = 0,$$

$$g(\alpha(a), \alpha'(a), \alpha'(b)) \geq 0, \quad g(\beta(a), \beta'(a), \beta'(b)) \leq 0.$$

Проверим, что для $H_1x = -h(x(a)) - x(b)$ и $H_2x = -g(x(a), x'(a), x'(b))$ условия ((25) - (28) выполняются.

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1x + H_2x =$$

$$-h(\alpha(a)) - \alpha(b) - g(\alpha(a), x'(a), x'(b)) \leq 0,$$

$$x(a) = \alpha(a) \Rightarrow H_1x = -h(\alpha(a)) - x(b) \leq 0,$$

$$x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x = -h(x(a)) - \beta(b) \leq 0,$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1x + H_2x =$$

$$-h(\beta(a)) - \beta(b) - g(\beta(a), x'(a), x'(b)) \geq 0,$$

$$x(a) = \beta(a) \Rightarrow H_1x = -h(\beta(a)) - x(b) \geq 0,$$

$$x(a) = \alpha(a) \Rightarrow H_1x = -h(x(a)) - \alpha(b) \geq 0.$$

Пусть функция h возрастает. Тогда

$$h(\beta(a)) + \alpha(b) = 0, \quad h(\alpha(a)) + \beta(b) = 0,$$

$$g(\alpha(a), \alpha'(a), \beta'(b)) \geq 0, \quad g(\beta(a), \beta'(a), \alpha'(b)) \leq 0.$$

Проверим, что для $H_1x = h(x(a)) + x(b)$ и $H_2x = g(x(a), x'(a), x'(b))$ условия (29) - (36) выполняются.

$$x(a) = \alpha(a) \Rightarrow H_1x = h(\alpha(a)) + x(b) \leq 0,$$

$$x(b) = \beta(b) \wedge H_1x = 0 \Rightarrow x(a) = \alpha(a),$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_2x = g(\alpha(a), x'(a), x'(b)) \geq 0,$$

$$x(a) = \beta(a) \Rightarrow H_1x = h(\beta(a)) + x(b) \geq 0,$$
$$x(b) = \alpha(b) \wedge H_1x = 0 \Rightarrow x(a) = \beta(a),$$
$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_2x = g(\beta(a), x'(a), x'(b)) \leq 0.$$

Список литературы

1. А.Я. Лепин, Л.А. Лепин, Разрешимость краевых задач между верхней и нижней функциями, Научные труды ЛУ , т.616, Рига, 1999, 55-121.

2. А.Я. Лепин, Л.А. Лепин, Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, Зинатне, Рига, 1988.

3. Ch. Fabry, P. Habets, Upper and lower solutions for second - order boundary value problems with non - linear boundary conditions, Semin. Math. Inst. Math. Pure et Appl. Univ. Cathol. Louvain, 1984, N 12, 1-26.

4. L.H. Erbe, Nonlinear boundary value problems for second order differential equations, Journ. of Diff. Equ., 1970, v. 7, 459-472.

5. A. Cabada, R.l. Pouso, Extremal solutions of strongly nonlinear discontinuous second order equations with nonlinear functional boundary conditions, Nonlinear Analysis, 42 (2000), 1377-1396.

6. D. Franco, D. O'Regan, Existence of solutions to second order problems with nonlinear boundary conditions, Dynamical Systems and Differential Equations, Supplement, AIMS, 2003, 273-280.

A. Lepin. Nonlinear boundary problems for φ-Laplacian

Summary. For the boundary value problem

$$(\varphi(t, x, x'))' = f(t, x, x'), \quad H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2$$

the theorem is proved which is the analogue of the corresponding theorem for the boundary value problem

$$x'' = f(t, x, x'), \quad H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2.$$

1991 MSC 34B99

A. Lepins. Nelineāras robežproblēmas φ-laplasian diferenciālvienādojumam

Anotācija. Robežproblēmai φ-laplasian diferenciālvienādojumam

$$(\varphi(t,x,x'))' = f(t,x,x'), \quad H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2$$

ir pieradīta teorēma analoģiska līdzīgai teorēmai robežproblēmai

$$x'' = f(t,x,x'), \quad H_1x = h_1, \quad H_2x = h_2.$$

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 30.11.2009

ˇ