Связь верхних и нижних функций с задачей Дирихле

Л.А. Лепин

Аннотация. Для φ - Лапласиана рассматривается связь нижних и верхних функций с разрешимостью задачи Дирихле.
Библиогр. 7 назв.

УДК 517.927

Рассмотрим уравнение

$$(\varphi(t,x,x^{'}))^{'} = f(t,x,x^{'}), \quad t \in I = [a,b], \tag{1}$$

где $\varphi \in C(I \times R^2, R)$ строго возрастает по x' и f удовлетворяет условиям Каратеодори: $f(.,x,y)$ измернма на I при фиксированных $x, y \in R$, $\quad f(t,.,.)$ непрервна на R^2 при почти всех $t \in I$ и для любого компактного множества $P \subset R^2$ найдется функция $g \in L_1(I,R)$ такая,что для всех $(t,x,y) \in I \times P$ справедливо неравенство $|f(t,x,y)| \leq g(t)$. Аналогичное уравнение изучалось в работах [1]-[5].

В теореме 1 для ограниченных функций $\alpha, \beta : I \to R$ получены условия, которые следуют из односторонней локальной разрешимости. На основе этих условий дается определение нижних и верхних функций и доказывается глобальная разрешимость задачи Дирихле, если между α и β выполняется условие Шредера. Далее показывается, что если между ограниченными функциями α и β выполняется усповие Шредера и имеется глобальная разрешимость, то α - нижняя функция, а β - верхняя функция.

Определение 1. Пусть $c \in [a,b)$ и $d \in (c,b]$. Функция $x \in C^1([c,d],R)$ является решением уравнения (1), если функция $\varphi(t,x(t),x'(t))$ абсолютно непрерывна и уравнение (1) удовлетворяется почти всюду на $[c,d]$.

Определение 2. Для функции $\alpha : I \to R$ имеется односторонняя локальная разрешимость сверху, если найдется $M \in R$ такое, что $\alpha \leq M$ и для любого $\tau \in I$ найдется $\delta_\tau > 0$ такое, что для любых $t_1, t_2 \in I$ из $\tau - \delta_\tau < t_1 < t_2 < \tau + \delta_\tau$ следует существование решения $x : [t_1, t_2] \to R$ уравнения (1) такого, что $x(t_1) = \alpha(t_1), x(t_2) = \alpha(t_2)$ и $\alpha(t) \le x(t) \le M$ для $t \in [t_1, t_2]$.

Для функции $\beta : I \to R$ имеется односторонняя локальная разрешимость снизу, если найдется $M \in R$ такое, что $\beta \ge M$ и для любого $\tau \in I$ найдется $\delta_\tau > 0$ такое, что для любых $t_1, t_2 \in I$ из $\tau - \delta_\tau < t_1 < t_2 < \tau + \delta_\tau$ следует существование решения $x : [t_1, t_2] \to R$ уравнения (1) такого, что $x(t_1) = \beta(t_1), x(t_2) = \beta(t_2)$ и $\beta(t) \ge x(t) \ge M$ для $t \in [t_1, t_2]$.

Для доказательства теоремы 1 понадобится следующая элементарная лемма, которую приведем без доказательства.

Лемма 1. Если $y \in C(I, R)$ и $D^+y(t) \ge k, t \in (a, b)$, то $k(b - a) \le y(b) - y(a)$.

Теорема 1. Если для ограниченной функции $\alpha : I \to R$ имеется односторонняя локальная разрешимость сверху, то α на (a, b) удовлетворяет локальному условию Липшица, для $t \in (a, b)$ существуют правая $\alpha_r'(t)$ и левая $\alpha_l'(t)$ производные и $\alpha_l'(t) \le \alpha_r'(t)$, существуют пределы в формулах (2)-(5) и

$$\lim_{t \to a_+} \alpha(t) = \alpha_a, \quad \lim_{t \to b_-} \alpha(t) = \alpha_b, \tag{2}$$

$$\lim_{t \to a_+} {\alpha_r}'(t) = \lim_{t \to a_+} {\alpha_l}'(t) = {\alpha_a}', \quad \lim_{t \to b_-} {\alpha_r}'(t) = \lim_{t \to b_-} {\alpha_l}'(t) = {\alpha_b}', \tag{3}$$

$${\alpha_r}'(\tau) = \lim_{t \to \tau_+} {\alpha_r}'(t) = \lim_{t \to \tau_+} {\alpha_l}'(t), \quad \tau \in (a, b), \tag{4}$$

$${\alpha_l}'(\tau) = \lim_{t \to \tau_-} {\alpha_r}'(t) = \lim_{t \to \tau_-} {\alpha_l}'(t), \quad \tau \in (a, b), \tag{5}$$

$$\alpha(a) \ge \alpha_a, \quad {\alpha_a}' = +\infty \to \alpha(a) > \alpha_a, \tag{6}$$

$$\alpha(b) \ge \alpha_b, \quad {\alpha_b}' = -\infty \to \alpha(b) > \alpha_b, \tag{7}$$

для любых $t_1 \in (a, b)$ и $t_2 \in (t_1, b)$ справедливо неравенство

$$\varphi(t_2, \alpha(t_2), \alpha_l'(t_2)) - \varphi(t_1, \alpha(t_1), \alpha_r'(t_1)) \ge \int_{t_1}^{t_2} f(t, \alpha(t), \alpha'(t))dt. \tag{8}$$

Если для ограниченной функции $\beta : I \to R$ имеется односторонняя локальная разрешимость снизу, то β на (a, b) удовлетворяет локальному условию Липшица, для $t \in (a, b)$ существуют правая $\beta_r'(t)$ и левая $\beta_l'(t)$ производные и $\beta_l'(t) \ge \beta_r'(t)$, существуют пределы в формулах (9)-(12) и

$$\lim_{t \to a_+} \beta(t) = \beta_a, \quad \lim_{t \to b_-} \beta(t) = \beta_b, \tag{9}$$

$$\lim_{t \to a_+} {\beta_r}'(t) = \lim_{t \to a_+} {\beta_l}'(t) = {\beta_a}', \quad \lim_{t \to b_-} {\beta_r}'(t) = \lim_{t \to b_-} {\beta_l}'(t) = {\beta_b}', \tag{10}$$

$${\beta_r}'(\tau) = \lim_{t \to \tau_+} {\beta_r}'(t) = \lim_{t \to \tau_+} {\beta_l}'(t), \quad \tau \in (a, b), \tag{11}$$

$${\beta_l}'(\tau) = \lim_{t \to \tau_-} {\beta_r}'(t) = \lim_{t \to \tau_-} {\beta_l}'(t), \quad \tau \in (a, b), \tag{12}$$

$$\beta(a) \le \beta_a, \quad {\beta_a}' = -\infty \to \beta(a) < \beta_a, \tag{13}$$

$$\beta(b) \le \beta_b, \quad {\beta_b}' = +\infty \to \beta(b) < \beta_b, \tag{14}$$

для любых $t_1 \in (a,b)$ и $t_2 \in (t_1, b)$ справедливо неравенство

$$\varphi(t_2, \beta(t_2), \beta_l^{'}(t_2)) - \varphi(t_1, \beta(t_1), \beta_r^{'}(t_1)) \le \int_{t_1}^{t_2} f(t, \beta(t), \beta^{'}(t))dt. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $c_1 \in R, \quad c_2 \in (-\infty, c_1), \quad P_{c_1c_2} = [\inf\{\alpha(t) : t \in I\}, M] \times [c_1, c_2]$, по $P_{c_1c_2}$ из условий Каратеодори находим $g_{c_1c_2} \in L_1(I, [0, +\infty))$ такое, что $|f(t,x,y)| \le g_{c_1c_2}(t)$ для $(t,x,y) \in I \times P_{c_1c_2}$ и

$$\max\{\varphi(t,x,c_2) - \varphi(t,x,c_1) : (t,x) \in I \times [\inf\{\alpha(t) : t \in I\}, M]\} = -m_{c_1,c_2}. \tag{16}$$

Покажем, что существует предел $\lim_{t\to\tau_+} \alpha(t) = \alpha_{\tau+}$ для $\tau \in [a,b)$. Предположим противное. Пусть

$$\lim_{t\to\tau_+} \inf \alpha(t) < d_1 < d_2 < \lim_{t\to\tau_+} \sup \alpha(t),$$

$c_1 = 1, c_2 = -1, \delta \in (0, \delta_\tau)$ достаточно мало: $\tau + \delta \in I, (d_2 - d_1)\delta^{-1} > 1$ и $\int_\tau^{\tau+\delta} g_{c_1c_2}(t)dt < m_{c_1c_2}$ и $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in (\tau, \tau+\delta)$ такие, что

$$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3, \alpha(\tau_1) < d_1, \alpha(\tau_2) > d_2, \alpha(\tau_3) < d_1. \tag{17}$$

Из локальной разрешимости следует существование решения $x : [\tau_1, \tau_3] \to R$ уравнения (1), удовлетворяющего следующим условиям: $x(\tau_1) = \alpha(\tau_1), x(\tau_3) = \alpha(\tau_3)$ и $\alpha(t) \le x(t) \le M$ для $t \in [\tau_1, \tau_3]$. А из (17) следует, что найдутся $\tau_4, \tau_5 \in [\tau_1, \tau_3]$ такие, что $\tau_4 < \tau_5, x'(\tau_4) > c_1$ и $x'(\tau_5) < c_2$. Следовательно, найдутся $t_1 \in (\tau_4, \tau_5)$ и $t_2 \in (t_1, \tau_5)$ такие, что $x'(t_1) = c_1, x'(t_2) = c_2, c_2 < x'(t) < c_1$ для $t \in (t_1, t_2)$ и

$$\varphi(t_2, x(t_2), x^{'}(t_2)) - \varphi(t_1, x(t_1), x^{'}(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x(t), x^{'}(t))dt$$

$$\ge -\int_{t_1}^{t_2} g_{c_1c_2}(t)dt > -m_{c_1c_2},$$

что противоречит (16). Аналогично доказывается существование предела $\lim_{t\to\tau_-} = \alpha_{\tau_-}$ для $\tau \in (a,b]$. Из локальной разрешимости следует, что $\alpha(\tau) \ge \alpha_{\tau+}$ для $\tau \in [a,b), \quad \alpha(\tau) \ge \alpha_{\tau-}$ для $\tau \in (a,b]$, если $\alpha(\tau) = \alpha_{\tau+}$ для $\tau \in (a,b)$, то $D^+\alpha(\tau) < +\infty$, а если $\alpha(\tau) = \alpha_{\tau-}$ для $\tau \in (a,b]$, то $D_-\alpha(\tau) > -\infty$. Если $\alpha(\tau) > \max\{\alpha_{\tau-}, \alpha_{\tau+}\}$ для $\tau \in (a,b)$, то аналогично предыдущему получаем противоречие. Покажем, что $\alpha_{\tau-} = \alpha_{\tau+}$ для $\tau \in (a,b]$. Предположим противное. Рассмотрим случай $\alpha_{\tau-} < \alpha_{\tau+}$. В этом случае $\alpha(\tau) = \alpha_{\tau+}$ и $D^+\alpha(\tau) < +\infty$. В качестве c_2 можно взять $\max\{0, D^+\alpha(\tau) + 1\}$, а $c_1 = c_2 + 1$. Аналогично предыдущему получаем противоречие. Случай $\alpha\tau_- > \alpha_\tau +$ рассматривается аналогично. Следовательно, функция α непрерывна на (a,b). Определим функцию $\alpha_* : I \to R$ следующим образом: $\alpha_*(a) = \alpha_{a+}, \alpha_*(t) = \alpha(t)$ для $t \in (a,b)$ и $\alpha_*(b) = \alpha_{b-}$. Покажем существование $\alpha'_{*r}(\tau)$ для $\tau \in [a,b)$. Предположим противное $D^-\alpha_*(\tau) < c_2 < c_1 < D^+\alpha_*(\tau)$. Пусть $\delta \in (0, \delta_\tau)$ достаточно мало, $l_1(t) = \alpha_*(\tau)+c_1(t-\tau)$ и $l_2(t) = \alpha_*(\tau)+c_2(t-\tau)$ для $t \in (\tau, \tau+\delta)$ и $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in (\tau, \tau+\delta)$ такие, что $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3, \alpha(\tau_1) < l_2(\tau_1), \alpha(\tau_2) > l_1(\tau_2)$ и $\alpha(\tau_3) < l_2(\tau_3)$. Аналогично предыдущему получаем противоречие. Существование $\alpha'_{*l}(\tau)$ для $\tau \in (a, b]$ доказывается аналогично. Заметим, что значения $-\infty$ и $+\infty$ для $\alpha'_{*r}(a)$ и $\alpha'_{*l}(b)$ не исключаются. Покажем, что $\alpha'_l(\tau) \le \alpha'_r(\tau)$ для $\tau \in (a, b)$. Действительно, если $\alpha'_l(\tau) > c_1 > c_2 > \alpha'_r(\tau)$, то аналогично предыдущему получаем противоречие. Теперь из предыдущего следуют неравенства $-\infty < \alpha'_l(\tau) \le \alpha'_r(\tau) < +\infty, \tau \in (a, b)$. Докажем существование пределов $\lim_{t\to\tau+} \alpha'_r(t)$ и $\lim_{t\to\tau+} \alpha'_l(t)$ для $\tau \in [a, b)$ и $\lim_{t\to\tau-} \alpha'_r(t)$ и $\lim_{t\to\tau-} \alpha'_l(t)$ для $\tau \in [a, b)$. Предположим противное. Рассмотрим случай

$$\lim_{t\to\tau+} \inf \alpha'_r(t) < c_2 < c_1 < \lim_{t\to\tau+} \sup \alpha'_r(t).$$

Пусть $\delta \in (0, \delta_\tau)$ достаточно мало и $\tau_4, \tau_5 \in (\tau, \tau+\delta)$ такие, что $\tau_4 < \tau_5, \alpha'_r(\tau_4) > c_1$ и $\alpha'_l(\tau_5) \le \alpha'_r(\tau_5) < c_2$. Из локальной разрешимости следует существование решения $x : [\tau_4, \tau_5] \to R$ уравнения (1), удовлетворяющего условиям: $x(\tau_4) = \alpha(\tau_4), x(\tau_5) = \alpha(\tau_5)$ и $\alpha(t) \le x(t) \le M$ для $t \in [\tau_4, \tau_5]$. Аналогично предыдущему получаем противоречие. Существование остальных пределов доказывается аналогично. Из $\alpha'_l(t) \le \alpha'_r(t)$ следует $\lim_{t\to\tau+} \alpha'_l(t) \le \lim_{t\to\tau+} \alpha'_r(t)$. Если $\lim_{t\to\tau+} \alpha'_l(t) < c_2 < c_1 < \lim_{t\to\tau+} \alpha'_r(t)$, то аналогично предыдущему получаем противоречие. Следовательно, $\lim_{t\to\tau+} \alpha'_l(t) = \lim_{t\to\tau+} \alpha'_r(t)$. Если $\lim_{t\to\tau+} \alpha'_r(t) < c_2 < c_1 < \lim_{t\to\tau+} \alpha'_{*r}(\tau)$, то аналогично предыдущему получаем противоречие. Если $\lim_{t\to\tau+} \alpha'_r(t) > \alpha'_{*r}(\tau)$, то противоречие получается из леммы 1. Следовательно,

$$\alpha'_{*r}(\tau) = \lim_{t\to\tau+} \alpha'_r(t) = \lim_{t\to\tau+} \alpha'_l(t), \tau \in [a, b). \tag{18}$$

Аналогично доказывается, что

$$\alpha'_{*l}(\tau) = \lim_{t\to\tau-} \alpha'_r(t) = \lim_{t\to\tau-} \alpha'_l(t), \tau \in (a, b]. \tag{19}$$

Из формул (18)-(19) следует, что α на (a, b) удовлетворяет локальному условию Липшица, а в формуле (3) $\alpha'_a = \alpha'_{*r}(a)$ и $\alpha'_b = \alpha'_{*l}(b)$. Если $\alpha'(a) = \alpha'_{*r}(a) = +\infty$, то из локальной разрешимости следует, что $\alpha(a) > \alpha_a = \alpha_*(a)$. Аналогично из $\alpha'(b) = \alpha'_{*l}(b) = -\infty$ следует $\alpha(b) > \alpha_b = \alpha_*(b)$.

Докажем справедливость неравенства (8). Прстроим последовательность $\alpha_n : I \to R, n = 1, 2, ...$ следующим образом. По определению 2 для каждого $t \in I$ найдем δ_t. Ясно, что интервал I покрывается интервалами $(t-\delta_t, t+\delta_t), t \in I$. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие, которое обозначим $(a_i, b_i), i = 1, ..., m$. Без ограничения общности можем считать, что $a_1 < a < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < ... < a_m < b_{m-1} < b < b_m$. Пусть $c_0 = a, c_i = (a_{i+1} + b_i)/2, i = 1, ...m-1$ и $c_m = b$. На интервале $[c_{i-1}, c_i]$ существует решение $x_i : [c_{i-1}, c_i] \to R$ уравнения (1) такое, что $x_i(c_{i-1}) = \alpha(c_{i-1}), x_i(c_i) = \alpha(c_i)$ и $\alpha(t) \le x_i(t_i) \le M, t \in [c_{i-1}, c_i]$. Определим α_1, полагая $\alpha_1(t) = x_i(t), t \in [c_{i-1}, c_i], i = 1, ...m$. Функцию x_i будем называть дугой α_1 с концами c_{i-1} и c_i, а c_i точками деления. Покажем, что α_1 удовлетворяет неравенству (8). Если t_1 и t_2 лежат на одном интервале, $[c_{i-1}, c_i]$, то неравенство (8) очевидно.

Рассмотрим случай $t_1 \in [c_{i-1}, c_i]$ и $t_2 \in [c_i, c_{i+1}]$. Тогда

$$\varphi(c_i, \alpha_1(c_i), \alpha'_{1l}(c_i)) - \varphi(t_1, \alpha_1(t_1), \alpha'_{1r}(t_1)) = \int_{t_1}^{c_i} f(t, \alpha_1(t), \alpha'_1(t))dt, \tag{20}$$

$$\varphi(t_2, \alpha_1(t_2), \alpha'_{1l}(t_2)) - \varphi(c_i, \alpha_1(c_i), \alpha'_{1r}(c_i)) = \int_{c_i}^{t_2} f(t, \alpha_1(t), \alpha'_1(t))dt, \tag{21}$$

Из $\alpha'_{1l}(c_i) \leq \alpha'_{1r}(c_i))$ и (20)-(21) следует (8) для α_1. Применяя индукцию, получаем доказательство неравенства (8) в остальных случаях. Для построения α_2 в качестве новых точек деления берем $d_i = (c_{i-1}+c_i)/2, i = 1, ..., m$. Далее, используя интервалы $[c_{i-1}, d_i]$ и $[d_i, c_i]$, строим α_2 аналогично α_1. Остальные α_n строятся аналогично построению α_2. Для любого замкнутого интервала $J \subset (a, b)$ последовательность α_n равномерно сходится к α на I. Действительно, предполагая противное, аналогично предыдущему получаем противоречие. Пусть $\tau \in (a, b)$ не является точкой деления и $\alpha'(\tau)$ существует. Покажем, что для любого $\epsilon > 0$ найдется n_ϵ такое, что справедливо неравенство $|\alpha'(\tau) - \alpha'_n(\tau)| < \epsilon$ при $n > n_\epsilon$. Предположим противное. Рассмотрим случай $\alpha'_n(\tau) \geq \alpha'(\tau) + \epsilon$ для достаточно большого n. Пусть $x : [c, d] \to R$ дуга функции α_n с концами c и d и $\tau \in (c, d)$. Если $\alpha'_l(d) < \alpha'(\tau) + \epsilon/2$, то $x'_l(d) < \alpha'(\tau) + \epsilon/2$ и аналогично предыдущему получаем противоречие. Случай $\alpha'_n(\tau) \leq \alpha'(\tau) - \epsilon$ рассматривается аналогично. Пусть $\tau_1, \tau_2 \in (t_1, t_2)$ не являются точками деления и $\alpha'(\tau_1)$ и $\alpha'(\tau_2)$ существуют. Из

$$\varphi(\tau_2, \alpha_n(\tau_2), \alpha'_n(\tau_2)) - \varphi(\tau_1, \alpha_n(\tau_1), \alpha'_n(\tau_1)) \geq \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t, \alpha_n(t), \alpha'_n(t))dt$$

при переходе к пределу при $n \to \infty$ следует

$$\varphi(\tau_2, \alpha(\tau_2), \alpha'(\tau_2)) - \varphi(\tau_1, \alpha(\tau_1), \alpha'(\tau_1)) \geq \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t, \alpha(t), \alpha'(t))dt.$$

Пепеходя к пределу при $\tau_1 \to t_1$ и $\tau_2 \to t_2$, получаем условие (8).

Условие для β доказывается аналогично.

Лемма 2. Если ограниченные функции $\alpha, \beta : I \to R$ удовлетворяют локальному условию Липшица на (a, b) и для любых $t_1 \in (a, b)$ и $t_2 \in (t_1, b)$, в которых существуют производные $\alpha'(t_1), \alpha'(t_2), \beta'(t_1)$ и $\beta'(t_2)$, удовлетворяют неравенствам

$$\varphi(t_2, \alpha(t_2), \alpha'(t_2)) - \varphi(t_1, \alpha(t_1), \alpha'(t_1)) \geq \int_{t_1}^{t_2} f(t, \alpha(t), \alpha'(t))dt, \tag{22}$$

$$\varphi(t_2, \beta(t_2), \beta'(t_2)) - \varphi(t_1, \beta(t_1), \beta'(t_1)) \leq \int_{t_1}^{t_2} f(t, \beta(t), \beta'(t))dt, \tag{23}$$

то для $t \in (a, b)$ существуют правые и левые производные $\alpha'_r(t), \alpha'_l(t), \beta'_r(t)$, $\beta'_l(t), \alpha'_l(t) \leq \alpha'_r(t)$ и $\beta'_l(t) \geq \beta'_r(t)$, существуют пределы $\lim_{t\to a+} \alpha(t) = \alpha_a$, $\lim_{t\to b-} \alpha(t) = \alpha_b, \lim_{t\to a+} \beta(t) = \beta_a, \lim_{t\to b-} \beta(t) = \beta_b, \lim_{t\to a+} \alpha'_r(t)$, $\lim_{t\to a+} \alpha'_l(t), \lim_{t\to b-} \alpha'_r(t), \lim_{t\to b-} \alpha'_l(t), \lim_{t\to a+} \beta'_r(t), \lim_{t\to a+} \beta'_l(t)$, $\lim_{t\to b-} \beta'_r(t), \lim_{t\to b-} \beta'_l(t)$, для $\tau \in (a, b)$ существуют пределы $\lim_{t\to\tau+} \alpha'_r(t)$, $\lim_{t\to\tau+} \alpha'_l(t), \lim_{t\to\tau-} \alpha'_r(t), lim_{t\to\tau-}\alpha'_l(t), \lim_{t\to\tau+} \beta'_r(t), \lim_{t\to\tau+} \beta'_l(t)$,

$\lim_{t\to\tau-}\beta_r'(t)$ и $\lim_{t\to\tau-}\beta_l'(t)$, для α справедливы условия (3)-(5), для β справедливы условия (10)-(12) и для любых $t_1\in(a,b)$ и $t_2\in(t_1,b)$ для α справедливо условие (8) и для β справедливо условие (15).

Доказательство. Пусть $\tau\in(a,b)$ и $\delta>0$ достаточно мало: $[\tau-\delta,\tau+\delta]\subset(a,b)$. Тогда найдется $L_{\tau\delta}>0$ такое, что α удовлетворяет условию Липшица на интервале $[\tau-\delta,\tau+\delta]$ с постоянной $L_{\tau\delta}$. По $P_{\tau\delta}=[\inf\{\alpha(t):t\in[\tau-\delta,\tau+\delta]\},M]\times[-L_{\tau\delta},L_{\tau\delta}]$ из условий Каратеодори находим $g_{\tau\delta}\in L_1(I,[0,\infty))$ такое, что $|f(t,x,y)|\le g_{\tau\delta}(t)$ для $(t,x,y)\in I\times P_{\tau\delta}$. Далее аналогично доказательству теоремы 1 получаем для $\in(a,b)$ существование производных $\alpha_r'(\tau)$, $\alpha_l'(\tau)$, неравенство $\alpha_l'(\tau)\le\alpha_r'(\tau)$, существование пределов $\lim_{t\to\tau+}\alpha_r'(t)$, $\lim_{t\to\tau+}\alpha_l'(t)$, $\lim_{t\to\tau-}\alpha_r'(t)$, $\lim_{t\to\tau-}\alpha_l'(t)$, и справедливость условий (4)-(5) и (8).

Для доказательства существования пределов $\lim_{t\to a+}\alpha(t)$, $\lim_{t\to b-}\alpha(t)$, $\lim_{t\to a+}\alpha_r'(t)$, $\lim_{t\to a+}\alpha_l'(t)$, $\lim_{t\to b-}\alpha_r'(t)$, $\lim_{t\to b-}\alpha_l'(t)$, и справедливости условия (3) потребуется следующее утверждение. Пусть $c_1\in R$, $c_2\in[-\infty,c_1)$, $\tau_1\in(a,b)$, $\tau_2\in(\tau_1,b)$, $\alpha_r'(\tau_1)>c_1$ и $\alpha_l'(\tau_2)<c_2$. Тогда найдутся $t_1\in(\tau_1,\tau_2)$ и $t_2\in(t_1,\tau_2)$ такие, что $\alpha_r'(t_1)=c_1,\alpha_l'(t_2)=c_2$ и $c_2<\alpha_l'(t)\le\alpha_r'(t)<c_1$ для $t\in(t_1,t_2)$. Пусть

$$t_1=\sup\{t\in(\tau_1,\tau_2):\alpha_r'(t)\ge c_1\}.$$

Из условий (4)-(5) следует, что $\tau_1<t_1<\tau_2$. Если $\alpha_r'(t)\ge c_1$, то из (4) получаем противоречие с определением t_1. Если $\alpha_l'(t_1)\le\alpha_r'(t_1)<c_1$, то из (5) получаем противоречие с определением t_1. Следовательно, $\alpha_r'(t_1)=c_1$. Пусть

$$t_2=\inf\{t\in(t_1,\tau_2):\alpha_l'(t)\le c_2\}.$$

Аналогично предыдущему получаем, что $t_1<t_2<\tau_2$ и $\alpha_l'(t_2)=c_2$. Из определения t_1 и t_2 следует неравенство $c_2<\alpha_l'(t)\le\alpha_r'(t)<c_1$ для $t\in(t_1,t_2)$. Далее аналогично доказательству теоремы 1 получаем существование пределов и условие (3). Для β доказательство аналогично.

Определение 3. Ограниченные функции $\alpha,\beta:I\to R$, удовлетворяющие локальному условию Липшица на (a,b) и неравенствам (22) и (23), соответственно, называются нижней и верхней функциями уравнения (1), если

$$\alpha(a)\ge\alpha_a=\lim_{t\to a+}\alpha(t),\quad \alpha(b)\ge\alpha_b=\lim_{t\to b-}\alpha(t),$$

$$\alpha_a'=\lim_{t\to a+}\alpha_r'(t)<+\infty,\quad \alpha_b'=\lim_{t\to b-}\alpha_l'(t)>-\infty,$$

$$\beta(a)\le\beta_a=\lim_{t\to a+}\beta(t),\quad \beta(b)\le\beta_b=\lim_{t\to b-}\beta(t),$$

$$\beta_a'=\lim_{t\to a+}\beta_r'(t)>-\infty,\quad \beta_b'=\lim_{t\to b-}\beta_l'(t)<+\infty.$$

Множество нижних и верхних функций обозначим через $A(I,R)$ и $B(I,R)$.

Определение 4. Пусть $\alpha,\beta:I\to R$ и $\alpha\le\beta$. Будем говорить, что для уравнения (1) между α и β выполняется условие Шредера (см. [6]), если для любых $c\in[a,b)$, $d\in(c,b]$ и решения $x:(c,d)\to R$ уравнения (1) из $\alpha(t)\le x(t)\le\beta(t)$ для $t\in(c,d)$ следует $\sup\{|x'(t)|:t\in(c,d)\}<+\infty$.

Теорема 2. Если $\alpha \in A(I,R), \beta \in B(I,R), \alpha \le \beta, A \in [\alpha(a), \beta(a)], B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ и между α и β выполняется условие Шредера, то задача Дирихле

$$(\varphi(t,x,x'))' = f(t,x,x'), \quad x(a) = A, x(b) = B, \quad \alpha \le x \le \beta \tag{24}$$

имеет решение.

Доказательство. Если $\alpha, \beta \in Lip(I,R)$, то существование решения задачи Дирихле (24) доказано в работе [7]. Пусть a_i, b_i, A_i и $B_i, i = 1,2,...$ такие, что $a < a_i < b_i < b, A_i \in [\alpha(a_i), \beta(a_i)], B_i \in [\alpha(b_i), \beta(b_i)], a_i \to a, b_i \to b, A_i \to A, B_i \to B$ при $i \to \infty$. Решение задачи Дирихле

$$(\varphi(t,x,x'))' = f(t,x,x'), \quad x(a_i) = A_i, x(b_i) = B_i, \quad \alpha(t) \le x(t) \le \beta(t), t \in [a_i, b_i]$$

обозначим через x_i. Из условия Шредера следует, что найдется $L > 0$ такое, что $|x_i'(t)| < L, t \in [a_i, b_i], i = 1,2,...$. Покажем, что последовательность $x_i', i = 1,2...$ равностепенно непрерывна. Предположим противное. Без ограничения общности можно считать, что найдется $\epsilon > 0$ и последовательности $t_{1i}, t_{2i} \in [a_i, b_i], i = 1,2,...$ такие, что $t_{1i} \to t_0, t_{2i} \to t_0, x_i(t_{1i}) \to x_0, x_i(t_{2i}) \to x_0, x_i'(t_{1i}) \to c_1, x_i'(t_{2i}) \to c_2$ и $|c_1 - c_2| \ge \epsilon$. Переходя к пределу в выражении

$$\varphi(t_{2i}, x_i(t_{2i}), x_i'(t_{2i})) - \varphi(t_{1i}, x_i(t_{1i}), x_i'(t_{1i})) = \int_{t_{1i}}^{t_{2i}} f(t, x_i(t), x_i'(t))dt,$$

получаем $\varphi(t_0, x_0, c_2) - \varphi(t_0, x_0, c_1) = 0$, что противоречит строгой монотонности φ по последнему аргументу. Следовательно, из последовательности $x_i, i = 1,2,...$ можно выбрать подпоследовательность, которая равномерно сходится к решению x задачи Дирихле (24).

Следствие 1. В условиях теоремы 2 между α и β имеется глобальная разрешимость задачи Дирихле. Для любых $c \in [a,b), d \in (c,b], C \in [\alpha(c), \beta(c)]$ и $D \in [\alpha(d), \beta(d)]$ существует решение задачи Дирихле

$$(\varphi(t,x,x'))' = f(t,x,x'), \quad x(c) = C, x(d) = D, \quad \alpha(t) \le x(t) \le \beta(t), t \in [c,d].$$

Теорема 3. Если функции $\alpha, \beta : I \to R$ ограничены, между α и β выполняется условие Шредера и имеется глобальная разрешимость задачи Дирихле, то $\alpha \in A(I,R)$ и $\beta \in B(I,R)$.

Доказательство. Из глобальной разрешимости следует односторонняя локальная разрешимость. Следовательно, можно воспользоваться теоремой 1. Сравнивая теорему 1 с определением 3, видим, что нужно показать отсутствие случаев $\alpha_a' = +\infty, \alpha_b' = -\infty, \beta_a' = -\infty$, и $\beta_b' = +\infty$. Пусть $\alpha_a' = +\infty$, последовательность $t_i \in (a,b), i = 1,2,...$ такая, что $t_i \to a$ при $i \to \infty$ и $x_i, i = 1,2,...$ решения задач Дирихле

$$(\varphi(t,x_i,x_i'))' = f(t,x_i,x_i'), \quad x_i(t_i) = \alpha(t_i), \quad x_i(b) = \alpha(b),$$

$$\alpha(t) \le x_i(t) \le \beta(t), \quad t \in [t_i, b].$$

Из $x_{ir}'(t_i) \ge \alpha_r'(t_i)$ следует $\sup\{x_i'(t) : t \in [t_i, b], i \in \{1,2,...\}\} = +\infty$. По теореме Лагранжа найдутся $M > 0$ и $d_i \in (a,b), i = 1,2,...$ такие, что $|x_i'(d_i)| < M$. Без ограничения общности бедем считать, что $d_i \to d$ при $i \to \infty, t_i < d$ для $i = 1, 2, ...$ и $|x_i'(d)| < M + 1$. Пусть

$$c = \inf\{\tau \in (a, d) : \sup\{|x_i'(t)| : t \in [t_i, d] \cap [\tau, d], i \in \{1, 2, ...\}\} < +\infty\}.$$

Ясно, что

$$\sup\{|x_i'(t)| : t \in [t_i, d] \cap [c, d], i \in \{1, 2, ...\}\} = +\infty\}. \tag{25}$$

Без ограничения общности будем считать, что

$$\lim_{i \to \infty} \sup\{|x_i'(t)| : t \in [t_i, d] \cap [c, d]\} = +\infty\}.$$

Если $\tau \in (c, d)$, то на интервале $[\tau, d]$ функции x_i и x_i' равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Следовательно, найдется подпоследовательность последовательности x_i, которая сходится к решению $x : [\tau, d] \to R$ уравнения (1) на интервале $[\tau, d]$ в норме C^1. Стандартным приемом находим подпоследовательность $x_{i_n}, n = 1, 2, ...$, которая сходится к решению $x : (c, d] \to R$ уравнения (1). При этом сходимость на каждом интервале $[\tau, d]$ в норме C^1. Из условия Шредера следует, что $\sup\{|x'(t)| : t \in (c, d]\} = N < +\infty$. Пусть $J = [\inf\{\alpha(t) : t \in I\}, sup\{\beta(t) : t \in I\}]$

$$2m = \min\{\varphi(t, x, y + 1) - \varphi(t, x, y) : (t, x, y) \in I \times J \times [-N - 2, N + 2]\}.$$

Из условия Каратеодори по $P = J \times [-N - 2, N + 2]$ находим $g \in L_1(I, [0, +\infty))$ такую, что $|f(t, x, y)| \leq g(t)$ для $(t, x, y) \in I \times P$. Пусть $\delta > 0$ такое, что $\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} g(t)dt < m$ для $\tau_1, \tau_1 \in I$ и $|\tau_1 - \tau_1| < \delta, |\varphi(\tau_1, x_1, y) - \varphi(\tau_2, x_2, y)| < m$ для $\tau_1, \tau_1 \in I$ и $|\tau_1 - \tau_1| < \delta, x_1, x_2 \in J$ и $|x_1 - x_2| < \delta(N+2)$ и $y \in [-N-2, N+2]$. Если $\tau_1 \in (c, c+\delta) \cap I$ и n_0 такие, что $|x_{i_n}'(\tau_1)| < N + 1$ при $n > n_0$, то $|x_{i_n}'(t)| < N + 2$ при $t \in [t_{i_n}, \tau_1] \cap [c, \tau_1]$ и $n > n_0$. Предположим противное. Найдутся $n > n_0$ и $\tau_2 \in (c, \tau_1)$ такие, что $|x_{i_n}'(\tau_2)| = N + 2$ и $|x_{i_n}'(t)| < N + 2$ для $\in (\tau_2, \tau_1)$. Из

$$|\varphi(\tau_2, x_{i_n}(\tau_2), x_{i_n}'(\tau_2)) - \varphi(\tau_1, x_{i_n}(\tau_1), x_{i_n}'(\tau_1))|$$

$$= |\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} f(t, x_{i_n}(t), x_{i_n}'(t))dt| \leq \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} g(t)dt < m,$$

$$m < |(\varphi(\tau_2, x_{i_n}(\tau_2), x_{i_n}'(\tau_2)) - \varphi(\tau_1, x_{i_n}(\tau_1), x_{i_n}'(\tau_2)))$$
$$+(\varphi(\tau_1, x_{i_n}(\tau_1), x_{i_n}'(\tau_2)) - \varphi(\tau_1, x_{i_n}(\tau_1), x_{i_n}'(\tau_1))|$$

следует противоречие. Следовательно, последовательность x_{i_n}' равномерно ограничена на $[c, \tau_1]$. По определению c последовательность x_{i_n}' равномерно ограничена на $[c, d]$, что противоречит условию (25). Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Список литературы

1. C. De Coster, On pairs of positive solutions for the one-dimensional p - Laplacian, preprint, 1992.

2. C. Fabry, D. Fayyad, Periodic solutions of second order differential equations with a p - Laplacian and asymmetric nonlinearities, preprint, 1993.

3. C. De Coster, Pairs of positive solutions for the one-dimensional p-Laplacian, Nonlinear Anal. TMA 23(5), 1994, 669-681.

4. M. Cherpion, C. De Coster, P. Habets, Monotone iterative methods for boundary value problems, Differential Integral Equation, 12(3), 1999, 309.

5. A. Cabada, R.L. Pouso, Extremal solutions of strongly nonlinear discontinuous second order equations with nonlinear functional boundary conditions, Nonlinear Analysis, 42, 2000, 1377-1396.

6. K. W. Schrader, Existence theorems for second order boundary value problems, J. Different. Equations, 5(3), 1969, 572-584.

7. A. Lepin, L. Lepin, F. Sadirbaev, The upper and lower functions method for one - dimensional φ - Laplacians, в печати.

L. Lepin. The relation between the lower and upper functions and solvability of the Dirichlet boundary value problem

Summary. Solvability of the Dirichle's boundary value problem for φ-Laplacian equation is studied under the condition that the lower and upper functions exist.

1991 MSC 34B99

L. Lepins. Augšējo un apakšējo funkciju saistība ar Dirihlē problēmas atrisināmību

Anotācija. Dirihlē problēmas atrisināmība φ-laplasian diferenciālvienādojumam ir pētīta pie nosacījuma ka eksistē augšēja un apakšēja funkcijas.

Institute of Mathematics
and Computer Science,
University of Latvia
Riga, Rainis blvd 29

Received 23.11.2009